Teil II: Die mit physikalischen und kinematischen Prädikaten erweiterte Logik der Intervalle und Logik der Punkte

Es wurde gezeigt[1], daß die aristotelische Logik der Intervalle, S_I, und die Cantorsche Logik der Punkte, S_P[2], *an sich* nur trivial verschieden sind. Sie sind nämlich, einer verallgemeinerten Definition der semantischen Äquivalenz nach, *semantisch*, und nach den entsprechenden trivialen Erweiterungen, die sie in bezug auf die elementaren Symbole „sprachlich" äquivalent machen, auch *syntaktisch* äquivalent. Es ist nun zu erörtern, was geschieht, wenn sie durch die zu ihnen passenden physikalischen und kinematischen Prädikate erweitert werden.

A. Der nicht aufhebbare Unterschied zwischen den mit einstelligen physikalischen Prädikaten erweiterten Systemen S_I und S_P

1. Einführung der Intervallprädikate in S_I: das System S_{I_0}

„Der hiesige Ort ist feucht". „Der heutige Tag ist kalt".

In solchen alltagssprachlichen Aussagen, wie es die angegebenen sind, kommen den räumlichen bzw. zeitlichen Intervallen *von außen* Eigenschaften zu, die *nicht* aus der Struktur der Intervalle *selbst* hervorgehen und auf sie nicht zurückführbar sind.

Die Physiker sprechen über die *Felder*, wie z.B. über das Temperatur-, Gravitations- und elektromagnetische Feld, die ähnlich gewisse Eigenschaften der einzelnen Räume bezeichnen, die auch *nicht* auf die bloß mathematische Struktur der räumlichen und zeitlichen Intervalle *selbst* zurückführbar sind.

Die alltagssprachlichen oder wissenschaftlich definierten, phänomenologischen oder etwa den phänomenologischen zu Grunde liegenden, aber aus der Struktur des Raums und der Zeit nicht hervorgehenden Eigenschaften der Intervalle können, im Gegensatz zu den bloß mathematischen, *physikalische* Eigenschaften genannt und durch Φ, X, Ψ,... bezeichnet werden.

Man kann annehmen, daß die Prädikate Φ, X, Ψ,... auch die Eigenschaften der *Körper* und ihrer *Teile* bezeichnen, insofern diese Eigenschaften immer als Eigenschaften der *Räume,* die die Körper bzw. ihre

Teile einnehmen, verstanden werden können, vorausgesetzt, daß diese Räume, wenn es sich um die bewegten Körper handelt, als sogenannte *relative*[3] Räume, d.h. als die im Bezugssystem der betreffenden Körper bestimmten Räume, verstanden werden.

Der Einfachheit wegen bezeichnen wir das Prädizieren von Φ, X, Ψ,... in dem mit Φ, X, Ψ,... erweiterten System der Intervalle, S_{I_0}, bloß mit Φa, Φb, Φc,..., Xa, Xb, Xc,..., Ψa, Ψb, Ψc,..., die auch elementare Formeln sind, wobei, *a*, *b*, *c*,... über die zeitlichen oder absoluten bzw. relativen räumlichen Intervalle laufen, und vernachlässigen vorerst die Tatsache, daß die den Φ, X, Ψ,... entsprechenden Eigenschaften den zeitlichen Intervallen immer an einem gegebenen Ort, bzw. den räumlichen immer zu einer gegebenen Zeit, zukommen.

Nun kann ein physikalisches Intervallprädikat in S_{I_0} als *elementar* oder als *komplex* bezeichnet werden, je nachdem, ob die entsprechende Eigenschaft jedem Teil des Intervalls, das diese Eigenschaft hat, auch zukommt oder nicht.

Für die elementaren Prädikate, die durch φ, χ, ψ,... bezeichnet werden, soll also das folgende Axiom gelten:

$$10_{S_{I_0}} \qquad (a)(\varphi a \Leftrightarrow (b)(b \sqsubset a \Rightarrow \varphi b)),$$

das ich *Priors Axiom* nenne, weil es eigentlich Arthur Prior war, der es kurz vor seinem Tode, während der Ersten Konferenz der internationalen Gesellschaft für das Zeitstudium 1969 in Oberwolfach, vorgeschlagen hat.

Wir führen auch $-\varphi a$ ein, dessen Gültigkeit folgendermaßen definiert wird:

$$-\varphi a \overset{df.}{\Leftrightarrow} (b)(b \sqsubset a \Rightarrow \neg\varphi b).$$

Nun sind φ und $-\varphi$ *konträre* elementare Prädikate, für die

$$\neg(\exists a)(\varphi a \wedge -\varphi a)$$

gilt, nicht aber

$$(a)(\varphi a \vee -\varphi a).$$

Wenn zum Beispiel mein Bleistift *B* bunt ist und φ „rot" bedeutet, dann gilt, wenn es rote Teile des Bleistifts gibt,

$$(\exists a)(\exists c)(a \sqsubset B \wedge c \sqsubset B \wedge \varphi a \wedge -\varphi c),$$

was bedeutet, daß

$$\neg(\varphi B \vee -\varphi B)$$

auch gilt.

Der Mangel an Allgemeingültigkeit von $\varphi a \vee -\varphi a$ hat also seine Ursache in der Tatsache, daß das Intervall, dem φ oder $-\varphi$ zukommt, in andere Intervalle eingeschlossen ist, was nicht bedeutet, daß *keinem* von überabzählbar unendlich vielen Intervallen, die sich an ein gegebenes Intervall anschließen, entweder φ oder $-\varphi$ zukommen kann. Der Bleistift kann aus von links nach rechts wechselseitig angeordneten „roten" und „nicht-roten" Teilen[4] bestehen, aber es scheint kaum möglich zu sein, daß man ihn von links oder von rechts berühren[5] kann, *ohne* daß damit *entweder* ein „rotes" *oder* ein „nicht-rotes" Teil „berührt" wird[6]. Daher soll das folgende Axiom eingeführt werden:

$$11_{S_{I_0}} \quad (a)(\exists b)(\exists c)(b \lessdot a \wedge a \lessdot c \wedge (\varphi b \vee -\varphi b) \wedge (\varphi c \vee -\varphi c)),$$

das ich als *Aristoteles-Kant*sches *Axiom* bezeichne, weil alle Raum- oder Zeitteile – wie bei Kant[7] – *an sich composita idealia*[8] bleiben, von denen nur *einige* in bezug auf *physikalische Prädikate* definierte elementar sein müssen, so daß erst der *physikalische* Raum und die *physikalische* Zeit, bzw. die *physikalischen* Körper, aus in diesem Sinn elementaren Teilen bestehen und demzufolge *composita realia*[9] – ἁπτόμενα im Aristotelischen Sinn[10] – sind[11].

Diese Elementarität der Teile hat *weder* mit dem epikureischen *noch* mit dem demokritischen Atomismus etwas zu tun, mit dem *epikureischen* nicht, weil hier jedes Raum- und Zeitintervall eingeschlossene Intervalle enthält, mit dem *demokritischen* nicht, weil auch keine physikalische Unteilbarkeit der elementaren Teile impliziert wird, die erst in einer Modallogik definierbar ist[12].

2. Einführung der Punktprädikate in S_P: das System S_{P_0}

Die Physiker sprechen nicht nur über die Felder, sondern auch über die Feld*punkte*, denen physikalische Eigenschaften zukommen[13].

Wir bezeichnen die physikalischen Punkteigenschaften mit den Konstanten $\bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}, \ldots$ und das Prädizieren in dem mit $\bar{\varphi}, \bar{\chi}, \bar{\psi}, \ldots$ erweiterten System der Punkte, S_{P_0}, mit $\bar{\varphi}\alpha, \bar{\varphi}\beta, \bar{\varphi}\gamma, \ldots, \bar{\chi}\alpha, \bar{\chi}\beta, \bar{\chi}\gamma, \ldots, \bar{\psi}\alpha, \bar{\psi}\beta, \bar{\psi}\gamma, \ldots$, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ über die Raum- oder Zeitpunkte laufen.

Man braucht hier *keine andere* Sorte von Konstanten, weil die Elemente der Modelle von S_{P_0} im Gegensatz zu den Elementen der Modelle von S_{I_0} nicht ineinander eingeschlossen werden können, und obwohl *verschiedene* physikalische Punkteigenschaften $\bar{\varphi}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\psi}$,... jedem Element aus dem Modell von S_{P_0} gleichzeitig zukommen können, kann *keine* von ihnen *komplex* sein, in dem Sinn, in dem die physikalischen Eigenschaften der Intervalle, die ineinander eingeschlossen sind, komplex sein können.

Da $\bar{\varphi}$ elementar sein soll, ist $-\bar{\varphi}$ mittels

$$-\bar{\varphi}\alpha \overset{df.}{\Leftrightarrow} \neg\bar{\varphi}\alpha$$

einzuführen, und damit gilt nicht nur

$$\vdash(\alpha)\neg(\bar{\varphi}\alpha \wedge -\bar{\varphi}\alpha),$$

sondern auch

$$\vdash(\alpha)(\bar{\varphi}\alpha \vee -\bar{\varphi}\alpha).$$

3. Einführung der Punktprädikate in S_{I_0}: die Systeme S_{I_1}–S_{I_5}

Es ist ungewiß, ob die beiden Sorten der Eigenschaften, die der Intervalle und die der Punkte, überhaupt *in ein und demselben* Sinn zu verstehen sind und ob das System der Intervalle und das System der Punkte nach den Erweiterungen durch Einführung von Punkt- und Intervallprädikaten *äquivalent* sein könnten. Daher bezeichnen wir die in S_{I_0} einzuführenden Punktprädikate mit φ^*, χ^*, ψ^*,... und die später in S_{P_0} einzuführenden Intervallprädikate mit $\bar{\varphi}^*$, $\bar{\chi}^*$, $\bar{\psi}^*$,... .

Da die Punkte in dem erweiterten S_I über die sich aneinander anschließenden Intervalle definiert worden waren[14], sind nun ihre physikalischen Eigenschaften über die physikalischen Eigenschaften der sich aneinander anschließenden Intervalle zu definieren.

Es sei aus heuristischen Gründen vorausgesetzt, daß es in der Welt nur zwei verschiedene, mit φ und $-\varphi$ bezeichnete, elementare Intervalleigenschaften gibt. Die Eigenschaft des Punktes innerhalb des Intervalls, für das φ gilt, bezeichnen wir mit φ^*, und die des Punktes innerhalb des Intervalls, für das $-\varphi$ gilt, mit $-\varphi^*$. Es soll also

$$(a)(b)(a \lessdot b \wedge \varphi a \wedge \varphi b \Rightarrow \varphi^* a,b)$$

und

$$(a)(b)(a \prec b \wedge -\varphi a \wedge -\varphi b \Rightarrow -\varphi^* a,b)$$

gelten, wobei $\varphi^* a,b$ und $-\varphi^* a,b$ die Zuschreibung von φ^* bzw. $-\varphi^*$ dem über a und b, mit $a \prec b$, bestimmten Punkt bedeutet.

Was aber in den Fällen, für die $a \prec b$, φa und $-\varphi b$, oder $a \prec b$, $-\varphi a$ und φb gilt? Es gibt mehrere Möglichkeiten.

Man kann *stipulieren*, daß die Punkteigenschaft immer nur von der entsprechenden Eigenschaft des *vorangehenden* Intervalls abhängt[15]. Wegen der Gültigkeit des *Aristoteles-Kant*schen *Axioms* ist es dann möglich, das System S_{I_1} zu bekommen, in dem die Zuschreibung der Punktprädikate φ_1^* und $-\varphi_1^*$ für jeden Punkt eindeutig und allgemeingültig bestimmt werden kann, also *auch dann*, wenn der Punkt durch die sich aneinander anschließenden Intervalle bestimmt wird, denen *komplexe* Eigenschaften zukommen, nämlich:

$$\varphi_1^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} a \prec b \wedge (\varphi a \vee (\exists c)(c \prec b \wedge \varphi c)),$$

$$-\varphi_1^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} a \prec b \wedge (-\varphi a \vee (\exists c)(c \prec b \wedge -\varphi c)).$$

In S_{I_1} gilt nicht nur

$$\vdash \neg(\exists a)(\exists b)(\varphi_1^* a,b \wedge -\varphi_1^* a,b),$$

sondern auch

$$\vdash (a)(b)(a \prec b \Rightarrow \varphi_1^* a,b \vee -\varphi_1^* a,b).$$

φ_1^* und $-\varphi_1^*$ sind also, wie $\bar{\varphi}$ und $-\bar{\varphi}$ in S_{P_0}, nicht bloß konträr, sondern *kontradiktorisch*.

Man bekommt das System S_{I_2}, mit $\varphi_2^* a,b$ und $-\varphi_2^* a,b$ anstatt $\varphi_1^* a,b$ bzw. $-\varphi_1^* a,b$, wenn $\succ$ anstelle von $\prec$ in den Definitionen eingesetzt wird.

Die Stipulationen, die zu S_{I_1} und S_{I_2} führen, sind ganz *ad hoc*, weil es in dem definierenden System der Intervalle und Intervalleigenschaften keinen einzigen Grund gibt, die *entscheidende* Rolle einer der zwei Richtungen allein zu rechtfertigen. Die beiden Stipulationsweisen sind gleich gut – oder eher gleich schlecht.

Man könnte deshalb ein System S_{I_3} formulieren, in dem die Richtung *an sich* mittels $a \prec b \vee a \succ b$ irrelevant gemacht wird, nämlich:

$$\varphi_3^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} (a \prec b \vee a \succ b) \wedge (\varphi a \vee (\exists c)((c \sqsubset a \wedge (c \prec b \vee c \succ b)) \wedge \varphi c)),$$

$$-\varphi_3^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} (a \prec b \vee a \succ b) \wedge (-\varphi a \vee (\exists c)((c \sqsubset a \wedge (c \prec b \vee c \succ b)) \wedge -\varphi c)).$$

Nun hängen die Punkteigenschaften *sowohl* von den elementaren Eigenschaften der vorangehenden *als auch* von den elementaren Eigenschaften der nachkommenden Intervalle ab, aber so, daß

$$(a)(b)(\varphi_3^* a,b \Leftrightarrow \varphi_3^* b,a)$$

nicht gilt.

Dies könnte den Sinn machen. Wenn schon der Punkt über das *Paar* der Intervalle bestimmt wird, sollte die Eigenschaft des Punktes von keiner der Eigenschaften der beiden Intervalle unabhängig sein. Eine Grenzfläche zwischen einem „roten" und einem „grünen" Raum könnte „grün*" sein, wenn sie vom „roten" Raum aus angeschaut wird, d.h. wenn sie definiert wird als eine, die zum „grünen" Raum gehört, und könnte gleichzeitig „rot*" sein, wenn sie vom „grünen" Raum aus angeschaut wird, d.h. wenn sie definiert wird als eine, die zum „roten" Raum gehört.

Nun folgt zwar daraus, daß φ_3^* und $-\varphi_3^*$ kontradiktorische und wesentlich nicht von der Richtung des Anschließens der bestimmenden Intervalle, sondern nur von ihren Eigenschaften abhängige Prädikate sind, aber auch zusätzlich, daß der durch zwei sich aneinander anschließende Intervalle bestimmte Punkt in gewissen Fällen *physikalisch nicht mehr* als ein und derselbe Punkt zu verstehen ist.

Das kann in dem System S_{I_4} aufgehoben werden, in dem die Äquivalenzen $(a)(b)(\varphi_4^* a,b \Leftrightarrow \varphi_4^* b,a)$ und $(a)(b)(-\varphi_4^* a,b \Leftrightarrow -\varphi_4^* b,a)$ mittels

$$\varphi_4^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} (a \prec b \vee a \succ b) \wedge ((\varphi a \vee \varphi b) \vee (\exists c)(((c \sqsubset a \wedge (c \prec b \vee c \succ b)) \vee \\ \vee (c \sqsubset b \wedge (c \prec a \vee c \succ a))) \wedge \varphi c))$$

und

$$-\varphi_4^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} (a \prec b \vee a \succ b) \wedge ((-\varphi a \vee -\varphi b) \vee (\exists c)(((c \sqsubset a \wedge (c \prec b \vee c \succ b)) \vee \\ \vee (c \sqsubset b \wedge (c \prec a \vee c \succ a))) \wedge -\varphi c))$$

erreicht werden.

In S_{I_4} sind aber φ_4^* und $-\varphi_4^*$ *keine konträren* Prädikate.

Man kann deshalb schließlich das System S_{I_5} formulieren, demgemäß die verschiedenen elementaren Eigenschaften der sich aneinander anschließenden Intervalle die „superponierte" Punkteigenschaft ψ_5^* herstellen:

$$\psi_5^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} (a \prec b \vee a \succ b) \wedge (((\varphi a \wedge -\varphi b) \vee (-\varphi a \wedge \varphi b) \vee$$
$$\vee (\exists c)(\exists d)(c \sqsubset a \wedge (c \prec b \vee c \succ b) \wedge d \sqsubset b \wedge (d \prec a \vee d \succ a) \wedge$$
$$\wedge ((\varphi c \wedge -\varphi d) \vee (-\varphi c \wedge \varphi d)))),$$

wobei die Eigenschaften φ_5^* bzw. $-\varphi_5^*$ dann und nur dann einem Punkt zukommen, wenn er innerhalb des gleichgearteten Intervalls liegt, für das φ bzw. $-\varphi$ gilt, nämlich:

$$\varphi_5^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} (a \prec b \vee a \succ b) \wedge ((\varphi a \wedge \varphi b) \vee$$
$$\vee (\exists c)(\exists d)(c \sqsubset a \wedge (c \prec b \vee c \succ b) \wedge d \sqsubset b \wedge (d \prec a \vee d \succ a) \wedge \varphi c \wedge \varphi d)),$$

$$-\varphi_5^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} (a \prec b \vee a \succ b) \wedge ((-\varphi a \wedge -\varphi b) \vee$$
$$\vee (\exists c)(\exists d)(c \sqsubset a \wedge (c \prec b \vee c \succ b) \wedge d \sqsubset b \wedge (d \prec a \vee d \succ a) \wedge$$
$$\wedge -\varphi c \wedge -\varphi d)).$$

Nun ist $-\psi_5^*$ als dem Prädikat ψ_5^* kontradiktorisches einzuführen:

$$-\psi_5^* a,b \overset{df.}{\Leftrightarrow} \neg \psi_5^* a,b.$$

φ_5^* und $-\varphi_5^*$ sind aber nur konträre und nicht kontradiktorische Prädikate[16].

4. Einführung der Intervallprädikate in S_{P_0}: das System S_{P_1}

In der Logik der Punkte soll einem Intervall eine elementare Eigenschaft $\bar{\varphi}^*$ dann und nur dann zukommen, wenn jedem Punkt dieses Intervalls ein und dieselbe Eigenschaft $\bar{\varphi}$ zukommt.

Wir bezeichnen die konträren elementaren Eigenschaften des abgeschlossenen Intervalls zwischen α und β mit $\bar{\varphi}_1^*$ und $-\bar{\varphi}_1^*$ und definieren die Gültigkeit von $\bar{\varphi}_1^*\alpha,\beta$ und $-\bar{\varphi}_1^*\alpha,\beta$ folgendermaßen:

$$\bar{\varphi}_1^*\alpha,\beta \overset{df.}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta \wedge (\gamma)(\neg\gamma < \alpha \wedge \neg\beta < \gamma \Rightarrow \bar{\varphi}\gamma),$$

$$-\bar{\varphi}_1^*\alpha,\beta \overset{df.}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta \wedge (\gamma)(\neg\gamma < \alpha \wedge \neg\beta < \gamma \Rightarrow -\bar{\varphi}\gamma).$$

Die Zuschreibung der elementaren Prädikate $\bar{\varphi}_2^*$ und $-\bar{\varphi}_2^*$ dem offenen Intervall zwischen α und β, $\bar{\varphi}_2^*\alpha,\beta$ und $-\bar{\varphi}_2^*\alpha,\beta$ ist über die Zuschreibung der elementaren Prädikate den abgeschlossenen Intervallen zu bestimmen, so zum Beispiel:

$$\bar{\varphi}_2^*\alpha,\beta \overset{df.}{\Leftrightarrow} (\gamma)(\delta)(\alpha < \gamma \wedge \gamma < \delta \wedge \delta < \beta \Rightarrow \bar{\varphi}_1^*\gamma,\delta).$$

Ähnlich ist die Zuschreibung der elementaren Prädikate dem nur links offenen Intervall zwischen α und β, $\bar{\varphi}_3^*\alpha,\beta$ und $-\bar{\varphi}_3^*\alpha,\beta$, sowie dem nur rechts offenen Intervall $\bar{\varphi}_4^*\alpha,\beta$ und $-\bar{\varphi}_4^*\alpha,\beta$ zu definieren[17].

Für alle elementaren Intervalleigenschaften in S_{P_1} gelten als Theoreme die *Analoga* von *Priors Axiom*, so zum Beispiel:

$$\vdash (\alpha)(\beta)(\bar{\varphi}_1^*\alpha,\beta \Leftrightarrow (\gamma)(\delta)(\neg\gamma < \alpha \wedge \gamma < \delta \wedge \neg\beta < \delta \Rightarrow \bar{\varphi}_1^*\gamma,\delta)).$$

Die *Analoga* des *Aristoteles-Kant*schen *Axioms* gelten in S_{P_1} *als Theoreme nicht* und dürften auch *als Axiome nicht* eingeführt werden, wenn alles, was für die Intervallprädikate gilt, auf das, was für die Punktprädikate gilt, zurückgeführt werden sollte, d.h. wenn S_{P_1} aus S_{P_0}, wie S_{I_1}–S_{I_5} aus S_{I_0}, nur mittels verschiedener Definitionen zu bekommen wäre.

5. Die wesentlichen Unterschiede zwischen den in den Systemen S_{I_1}–S_{I_5} und in dem System S_{P_1} definierten Intervall- und Punktprädikaten

Die wesentlichen Unterschiede zwischen den mit physikalischen Intervall- und Punktprädikaten erweiterten S_I und S_P, von denen *nicht alle* von der Gültigkeit bzw. Nicht-Gültigkeit des *Aristoteles-Kant*schen *Axioms* abhängen, haben zwei Aspekte. Sie betreffen nämlich sowohl die Aussagen über die Punkt- als auch die Aussagen über die Intervalleigenschaften.

So ist z.B. die widerspruchsfreie Formel aus S_{P_0}:

$$(\exists\alpha)(\exists\beta)(\alpha < \beta \wedge -\bar{\varphi}\beta \wedge (\gamma)(\neg\gamma < \alpha \wedge \gamma < \beta \Rightarrow \bar{\varphi}\gamma)),$$

die in einer gewissen Struktur erfüllt sein kann, nicht widerspruchsfrei übersetzbar in S_{I_1}, weil die dem $-\bar{\varphi}\beta$ entsprechende Formel $-\varphi_1^* a,b$ verlangte, daß für a bzw. ein gewisses c, mit $c \sqsubset a$ und $c \prec b$, $-\varphi a$ bzw. $-\varphi c$ gilt, und dann könnte innerhalb von a bzw. c φ_1^* keinem Paar der sich aneinander anschließenden Intervalle zugesprochen werden.

Es ist ähnlich zu beweisen, daß die widerspruchsfreie Formel

$$(\exists\alpha)(\exists\beta)(\alpha < \beta \wedge -\bar{\varphi}\alpha \wedge (\gamma)(\alpha < \gamma \wedge \neg\beta < \gamma \Rightarrow \bar{\varphi}\gamma))$$

nicht widerspruchsfrei übersetzbar in S_{I_2} ist.

Die Übersetzung der Formeln aus S_{P_0} in S_{I_3} und umgekehrt kann nicht gegenseitig eindeutig sein, weil $\varphi_3^* a,b$ und $\varphi_3^* b,a$ nicht äquivalent sind. Der daraus folgende Unterschied ist in S_{P_0} nicht zu fassen.

In S_{I_4} sind, im Gegensatz zu $\bar{\varphi}$ und $-\bar{\varphi}$, φ_4^* und $-\varphi_4^*$ keine *konträren* Prädikate, und in S_{I_5}, im Gegensatz zu

$$\vdash (\alpha)(\bar{\varphi}\alpha \vee -\bar{\varphi}\alpha),$$

gilt

$$(a)(b)(a \lessdot b \Rightarrow \varphi_5^* a,b \vee -\varphi_5^* a,b)$$

nicht[18].

In bezug auf die *Intervall*prädikate kann man zeigen, daß es, im Gegensatz zu dem System S_{P_1}, in dem es gut möglich ist, daß $\bar{\varphi}_1^* \alpha,\gamma$ für jedes γ gilt, das zwischen α und β liegt, ohne daß $\bar{\varphi}_1^* \alpha,\beta$ gilt, in S_{I_0} (und demzufolge in allen anderen Systemen der Intervalle) nicht möglich ist, daß φ für ein offenes oder halb-offenes Intervall gilt, ohne daß φ auch für das entsprechende abgeschlossene Intervall gilt, weil

$$\vdash (a)(b)(c)(a \lessdot b \wedge b \lessdot c \Rightarrow (d_1)(d_2)\ldots(d_i)\ldots((a \lessdot d_1 \wedge d_1 \lessdot d_2 \wedge d_2 \lessdot d_3 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge d_i \lessdot d_{i+1} \wedge \ldots \wedge (d_i) d_i < c \wedge \neg(\exists e)(d_i)(d_i < e \wedge e < c)) \Rightarrow ((d_i)\varphi d_i \Rightarrow \varphi b)))$$

(ohne die Benutzung des *Aristoteles-Kant*schen *Axioms*!) beweisbar ist[19].

Die mit *einstelligen* physikalischen Prädikaten erweiterte Logik der Intervalle und die mit *einstelligen* physikalischen Prädikaten erweiterte Logik der Punkte sind also *wesentlich verschieden.*

Die zwei rivalisierenden Systeme können natürlich *auch nach* den Erweiterungen mit physikalischen Prädikaten äquivalent sein, *wenn* die physikalischen Prädikate entweder in S_I oder in S_P als *uneigentliche*, d.h. als *zweistellige*, nur die *relationalen* Eigenschaften bezeichnenden Prädikate, eingeführt werden, so daß sie entweder in dem System der *Intervalle nicht* von den physikalischen Prädikaten der *Intervalle* oder in dem System der *Punkte nicht* von den physikalischen Prädikaten der *Punkte* abhängen, sondern *ursprünglich* für die *über Intervalle* definierten *Punkte* bzw. *ursprünglich* für die *über Punkte* definierten *Intervalle* gelten. Dieser Fall wäre aber uninteressant, weil dann *schon von Anfang an unterstellt* wird, daß die physikalischen Eigenschaften ursprünglich nur den Intervallen bzw. ursprünglich nur den Punkten zukommen.

6. Der Unterschied zwischen der Logik der Intervalle und der Logik der Punkte in bezug auf die maximale Anzahl der physikalisch verschiedenen Teilintervalle

Ein wichtiger Unterschied zwischen den rivalisierenden Systemen, um die es sich handelt, betrifft die Frage über die maximal mögliche Anzahl der physikalisch verschiedenen Intervalle, die innerhalb eines Intervalls liegen können.

Es ist – wegen der Gültigkeit des *Aristoteles-Kant*schen *Axioms* – zu beweisen, daß diese Anzahl in *jedem* gegebenen Fall *endlich* sein muß (was nicht impliziert, daß sie nicht von Fall zu Fall immer größer sein kann). Es gilt nämlich

$$\vdash (a)\neg((\exists b_1)(\exists b_2)\ldots(\exists b_i)\ldots(b_1 \lessdot b_2 \wedge b_2 \lessdot b_3 \wedge \ldots \wedge b_i \lessdot b_{i+1} \wedge \ldots \wedge (b_i) b_i \sqsubset a \ldots$$
$$\ldots \wedge \varphi b_1 \wedge -\varphi b_2 \wedge \varphi b_3 \wedge \ldots \wedge \varphi b_{2i-1} \wedge -\varphi b_{2i} \wedge \varphi b_{2i+1} \wedge \ldots)).$$

Beweis

Aus dem *Kontinuumsaxiom*, 9_{S_I}, folgt:

$$\vdash (a)(b_1)(b_2)\ldots(b_i)\ldots(b_1 \lessdot b_2 \wedge b_2 \lessdot b_3 \wedge \ldots \wedge b_i \lessdot b_{i+1} \wedge \ldots \wedge (b_i) b_i \sqsubset a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists c)((a < c \wedge \neg a < c) \wedge (b_i)(b_i < c \wedge \neg(\exists d)(b_i < d \wedge d < c)))).$$

Seien A, B_1, B_2,…, B_i,… und C die Werte, für die die beiden Implikationsseiten erfüllt sind. Wir wollen voraussetzen, daß im Gegensatz zur Behauptung der Formel, die als Theorem bewiesen werden soll, φB_1, $-\varphi B_2$, φB_3,…, φB_{2i-1}, $-\varphi B_{2i}$, φB_{2i+1},… gilt. Dann wäre:

$$(e)(e \lessdot C \Rightarrow (\exists b_{2i-1})(\exists b_{2i})(b_{2i-1} \sqsubset e \wedge \varphi b_{2i} \sqsubset e \wedge \varphi b_{2i-1} \wedge -\varphi b_{2i}))$$

gültig, was der aus dem *Aristoteles-Kant*schen *Axiom* unmittelbar folgenden Formel

$$(\exists e)(e \lessdot C \wedge (\varphi e \vee -\varphi e))$$

widerspräche.

Dasselbe ist zu beweisen, wenn $\gtrdot$ anstelle von $\lessdot$ steht[20].

Da es in S_{P_1} kein Analogon zum *Aristoteles-Kant*schen *Axiom* gibt, ist es, diesem System gemäß, nicht nur möglich, daß innerhalb eines Intervalls unendlich viele physikalisch verschiedene *Punkte*, sondern auch, daß darin unendlich viele physikalisch verschiedene *Intervalle* liegen.

7. Die Vor- und Nachteile der mit physikalischen Prädikaten erweiterten rivalisierenden Systeme

Die Vor- und Nachteile der wesentlich nicht-äquivalenten Systeme, innerhalb deren die physikalische Welt beschrieben werden sollte, hängen davon ab, ob die verschiedenen Fragen über die physikalische Welt, die man *stellen* bzw. die man *nicht erlauben* wollte, in bezug auf die *Modelle* der Systeme *stellbar* sind.

a) Phänomenologische und substantielle Eigenschaften

Es gibt elementare physikalische Eigenschaften, die gewissen Räumen zuschreibbar sind, nur weil sie gewissen anderen Räumen, in die die vorigen eingeschlossen sind, zuschreibbar sind. Solche Eigenschaften bezeichnen wir als *elementare phänomenologische* Eigenschaften.

So kann z.B., nach der gängigen physikalischen Farbentheorie, einem sehr, sehr kleinen Teil meines Bleistifts *an sich* weder das Prädikat „rot" noch das Prädikat „nicht-rot" zugeschrieben werden. Dennoch sind ihm „rot" und „nicht-rot" *zuschreibbar*, weil er der Teil gewisser größerer Teile ist, denen „rot" und „nicht-rot" an sich zuschreibbar sind. Er ist demzufolge rot, wenn er in einen solchen größeren Teil eingeschlossen ist, der rot ist, nicht-rot, wenn er in einen solchen größeren Teil eingeschlossen ist, der nicht-rot ist, und wenn er mit zwei solchen größeren Teilen überlappt, von denen der eine rot und der andere nicht-rot ist, ist er bunt.

Im Gegensatz zu den elementaren phänomenologischen Eigenschaften ist eine elementare Eigenschaft *substantiell*, wenn sie jedem Intervall *an sich*, sei es noch so klein, zuschreibbar ist.

In dem System der Intervalle werden die beiden Arten der Eigenschaften, die phänomenologischen und die substantiellen, *gleich* behandelt, insofern *Priors Axiom* nur den allgemeingültigen und gegenseitigen Zusammenhang zwischen der *Erfüllung* von φa und $(b)(b \sqsubset a \Rightarrow \varphi b)$ behauptet – der sowohl die phänomenologischen als auch die substantiellen Eigenschaften betrifft – und an sich nichts mit der nicht-gegenseitigen Abhängigkeit der Erfüll*barkeits*bedingungen von φa und φb zu tun hat, die für die phänomenologischen und nicht für die substantiellen Eigenschaften gilt. Der Unterschied zwischen den phänomenologischen und substantiellen Eigenschaften ist *syntaktisch* erst in einer

Modallogik zu fassen, ähnlich wie der Unterschied zwischen den physikalisch teil*baren* und physikalisch unteil*baren* Teilen.

Die Tatsache, daß die elementaren phänomenologischen und substantiellen Eigenschaften in dem System der Intervalle *syntaktisch gleich* behandelt werden, schließt aber gleichzeitig nicht aus, daß es in dem *Modell* einen Unterschied zwischen den beiden gibt: φ bezeichnet eine phänomenologische Eigenschaft in einem gegebenen Modell dann und nur dann, wenn die Erfüllbarkeitsbedingungen so bestimmt werden, daß die Erfüllbarkeit von φa manchmal von der Erfüllbarkeit von $(\exists b)(a \sqsubset b \wedge \varphi b)$ abhängt, während die Erfüllbarkeit (nicht Erfüllung) von φb dann nicht von der Erfüllbarkeit von φa abhängt.

Ein solcher Unterschied zwischen den *Intervall*eigenschaften soll in einem Modell von S_{P_1} ausgeschlossen werden, weil dort zunächst $\bar{\varphi}^*\alpha,\beta$ über $(\gamma)(\neg\gamma < \alpha \wedge \neg\beta < \gamma \Rightarrow \bar{\varphi}\gamma)$ *definiert* ist, so daß auch die *Erfüllbarkeit* von $\bar{\varphi}^*\alpha,\beta$ *per definitionem* von der Erfüllbarkeit von $\bar{\varphi}\gamma$ abhängen *müßte*. Die Erfüllbarkeit von $\bar{\varphi}\gamma$ soll aber dann für kein γ von der Erfüllbarkeit von irgendeinem $\bar{\varphi}\delta$ abhängen, weil – im Gegensatz zu einem Modell von S_{I_0}, in dem die Elemente *composita idealia* ausmachen, wobei das Theorem

$$\vdash (a)(\varphi a \Rightarrow (b)(b \sqsubset a \Rightarrow \varphi b))$$

den Übergang von φa zu φb ermöglicht – die Elemente des Modells von S_{P_1} *selbständig* sind und es in S_{P_1} *kein Theorem* gibt, das die Erfüllung von $\bar{\varphi}\delta$ und $\bar{\varphi}\gamma$ zu einer Abhängigkeit brächte. Wenn diese *Erfüllungs*unabhängigkeit überhaupt ein Charakteristikum der Logik der Punkte sein sollte, aufgrund *dessen* kein Analogon zum *Aristoteles-Kant*schen *Axiom* eingeführt worden war, dürfte es auch keine *Erfüllbarkeits*abhängigkeit zwischen $\bar{\varphi}\delta$ und $\bar{\varphi}\gamma$ geben.

Die Tatsache, daß in der mit den physikalischen Prädikaten erweiterten Logik der Intervalle alle elementaren Intervalleigenschaften *syntaktisch gleich* behandelt werden, *ohne* daß damit der semantische Unterschied zwischen den phänomenologischen und substantiellen Eigenschaften verschwinden müßte – was sowohl für die Alltagssituationen als auch für die Physik wichtig sein kann –, während das in der mit den physikalischen Prädikaten erweiterten Logik der Punkte nur so erreichbar wäre, daß eine ihrer leitenden Ideen über die *Punktprädikatenerfüllungsunabhängigkeit* durch das Zugeben der *Punktprädikatenerfüllungsabhängigkeit* aufgehoben sein würde, könnte als *Vorteil* der *Logik der Intervalle* bezeichnet werden.

b) Kontinuierliche Eigenschaftsänderungen

Man könnte erwarten, den Vorteil der Logik der Punkte in denjenigen Fällen zu finden, in denen die Eigenschaften *kontinuierlich variieren.* Wie könnten die *Punkt*eigenschaften innerhalb eines Systems der Intervalle behandelt werden, in dem die Zuschreibung der Punktprädikate von der Zuschreibung der *elementaren* Intervallprädikate abhängt?

Einem zeitlichen oder räumlichen Intervall, in dem, zum Beispiel, die Temperatur kontinuierlich verändert wird, kommt *keine* Temperaturgröße als elementare Eigenschaft zu, wie auch *keinem* der Teilintervalle. Die durchschnittliche Temperaturgröße ist aber auch *keine* elementare Eigenschaft, weil sie in dem Fall, um den es sich handelt, für je zwei Teilintervalle verschieden ist.

Aber nicht nur, daß einem Punkt, der innerhalb eines solchen Intervalls liegt, eine Temperaturgröße *aufgrund* der Temperaturgrößen keiner zwei sich aneinander anschließenden Intervalle zugeschrieben werden könnte, es müßte auch die Zuschreibung ausgerechnet jener Temperaturgröße *verneint* werden, die ihm in dem System der Punkte *zukäme,* weil *per definitionem* $\neg\varphi a$ und $\neg\varphi b$, mit $a \lessdot b$, in jedem der Systeme S_{I_1}–S_{I_5} $\neg\varphi^* a,b$ implizieren.

Diese für ein System der Intervalle auf jeden Fall unangenehme Folge könnte jedoch dadurch kompensiert werden, daß die Punkteigenschaften, wie die Punkttemperaturgrößen in dem angegebenen Beispiel, auch auf eine *andere* Weise verstanden werden, nämlich als „*superponierte*" Eigenschaften, die innerhalb von S_{I_5} – oder eines kombinierten Systems, das die Definitionen aus S_{I_5} enthält – behandelt werden könnten.

So könnte man sagen, daß, wenn auch bei den kontinuierlichen Temperaturänderungen keine bestimmte Temperaturgröße als elementare Eigenschaft dem Intervall, in dem die Änderung geschieht, zukommen kann, ihm jedoch eine Temperatur*änderungseigenschaft* zukommt. Die Temperaturänderungseigenschaften können schon deshalb verschieden sein, weil es verschiedene Änderungs*formen* gibt[21]. Für die jetzige Frage genügt aber, daß die zwei Änderungseigenschaften der zwei sich aneinander anschließenden Intervalle eine „*superponierte*" *Punkteigenschaft* bestimmen könnten, die genau dem, was in dem Modell des Systems der Punkte eine *bestimmte Temperaturgröße* wäre, entspräche.

Eine Temperaturänderung in dem Intervall *a* und eine andere in dem an *a* sich anschließenden Intervall *b*[22] können, zum Beispiel, $\psi^*_5 a,b$ als die Punkttemperatur des durch *a* und *b* bestimmten Punktes mit genau 5 °C bestimmen. Was dabei künstlich oder viel zu subtil erscheint, ist die Tatsache, daß *dieses* 5 °C nicht in demselben Sinn verstanden werden darf, in dem für die Physiker *gleiche* Punkttemperaturgröße verstanden würde, wenn den beiden Intervallen, *a* und *b*, Temperaturgröße von 5 °C (und nicht die gegebenen *Temperaturänderungs*eigenschaften) zukäme, weil φ_5^* und ψ_5^* aus S_{I_5} kontradiktorische Prädikate sind. Dieser „zu subtile" Unterschied ist jedoch, trotz seiner unangemessenen Subtilität, *nicht unfeststellbar*, weil er von dem klaren Unterschied zwischen den konstanten Temperaturen und den kontinuierlichen Temperaturänderungen abhängt.

c) Die Eigenschaften der abgeschlossenen und offenen Intervalle

Im Gegensatz zu dem vielleicht zu subtilen, aber auf dem Erkennbaren beruhenden Unterschied zwischen den zwei Arten der *Punkt*eigenschaften in den Modellen eines Systems der Intervalle, gibt es in den Modellen von S_{P_1} einen seltsamen Unterschied zwischen den *Intervall*eigenschaften der abgeschlossenen und offenen Intervalle, der die Möglichkeit der Existenz der *begrenzten*, aber gleichzeitig *kein Ende habenden* physikalischen Objekte mit sich bringt.

Wir haben gesehen[23], daß in den Modellen des Systems der Intervalle, wenn einem offenen Intervall eine elementare Eigenschaft zukommt, sie dann auch – wegen des *Axioms Priors* – dem entsprechenden abgeschlossenen Intervall zukommen muß, was so verstanden werden kann, daß es *keinen physikalischen* Unterschied zwischen den offenen und abgeschlossenen Intervallen gibt. Sie sind *ein und dasselbe physikalische Objekt.*

Das ist in den Modellen des Systems der Punkte nicht so, weil ein offenes oder halb-offenes Intervall gleichgeartet sein kann, ohne daß deshalb das entsprechende abgeschlossene Intervall gleichgeartet sein muß, es kann nämlich wegen einer verschiedenen Eigenschaft, die einem der Endpunkte oder den beiden zukommt, „bunt" sein. Das größte gleichgeartete Teilintervall eines solchen „bunten" Intervalls wäre ein *begrenztes, aber ein Ende nicht habendes physikalisches Objekt.* Es wäre z.B. möglich, daß es physikalische Würfel ohne eine, mehrere oder alle Endflächen gibt!

Das ist ein Beispiel dafür, was man in einem Modell *hat,* aber *in bezug* auf die Fragen über die physikalische Welt – Friede den erhabenen mathematischen Geistern! – *nicht* haben *will.*

d) Die Unendlichkeit der Anzahl der physikalisch verschiedenen Teile eines Intervalls

Wenn man nun noch die Gültigkeit keines Analogons des *Aristoteles-Kant*schen *Axioms* im System der Punkte in Anspruch nimmt, wird die Idee eines begrenzten, aber kein Ende habenden Objekts etwas, das nur noch mit den buchstäblich zugedrückten Augen akzeptiert werden könnte.

Ein durch die anderen Intervalle abgegrenztes Intervall bzw. ein physikalisches Objekt kann, dem System S_{P_1} gemäß, unendlich viele physikalisch verschiedene Intervalle enthalten. Seien die Teilintervalle bzw. die Teile eines solchen physikalischen Intervalls folgendermaßen angeordnet: Dem ersten auf der linken Seite kommt $\bar{\varphi}^*$ zu, weil allen seinen Punkten, einschließlich seines rechten Endpunkts, $\bar{\varphi}$ zukommt, dem rechtsfolgenden kommt das dem $\bar{\varphi}^*$ konträre $\bar{\chi}^*$ zu, weil allen seinen Punkten, einschließlich seines rechten Endpunkts, $\bar{\chi}$ zukommt, dem dritten kommt wieder $\bar{\varphi}^*$ zu, weil allen seinen Punkten, einschließlich seines rechten Endpunkts, $\bar{\varphi}$ zukommt, und so weiter auf diese Weise ins Unendliche. Nehmen wir außerdem zur Veranschaulichung an, daß es gefährlich ist, ein jedes Teil, dem $\bar{\varphi}^*$ zukommt, anzuschauen (also insbesondere es von rechts anzuschauen), und nicht gefährlich, ein jedes, dem $\bar{\chi}^*$ zukommt, anzuschauen, wobei ein solches Teil auch ein guter Schutzschild gegen die gefährlichen Teile ist, wenn es zwischen einem gefährlichen Teil und dem Anschauer liegt. Wir wollen schließlich voraussetzen, daß das Gebiet, das das beschriebene Objekt auf der rechten Seite abgrenzt, einschließlich des rechten Endpunkts des abgeschlossenen Intervalls, innerhalb dessen die gefährlichen und nichtgefährlichen Teile als das dem abgeschlossenen Intervall entsprechende offene Intervall ausmachende Teilintervalle liegen, so beschaffen ist, daß es gleichzeitig ein durchsichtiges, nicht gefährliches und keinen Schutz bietendes Gebiet ist. Ist es unter diesen Voraussetzungen gefährlich oder nicht gefährlich, von diesem Gebiet aus das aus unendlich vielen gefährlichen und nichtgefährlichen Teilen bestehende Objekt anzuschauen?

Obwohl *jedes* gefährliche und *jedes* nicht-gefährliche Teil *einen rechten* Endpunkt *hat,* obwohl die gefährlichen und nicht-gefährlichen Teile *nicht überlappen* und *keine superponierte*, etwa „halb-gefährliche" Eigenschaft herstellen könnten und obwohl zwischen dem Gebiet, von dem aus man schaut, und dem angeschauten Objekt *kein drittes* Objekt liegt, sollte die angegebene einfache und – man würde sagen – gutformulierte Frage *nicht stellbar* sein[24]. Die Lösung ist also, die Augen zuzudrücken!

Nach dem System der Intervalle, in dem das *Aristoteles-Kant*sche *Axiom* gilt, darf man die Augen immer offen halten, mit dem Risiko natürlich, daß das gefährlich sein kann.

B. Der nicht aufhebbare Unterschied zwischen den mit Ruhe- und Bewegungszustandprädikaten erweiterten Systemen S_I und S_P

Die Ruhe- und Bewegungszustandprädikate sind in die beiden Systeme, S_I und S_P, gleich einzuführen, nämlich über die *Raumzeitpositionen* des Objekts, die anhand eines *Zuordnungsaxioms* bestimmt werden, nur daß das Objekt ursprünglich in dem System der Intervalle ein *ausgedehntes* Objekt, in dem System der Punkte aber ein materieller *Punkt* ist[25], und daß die ihm zugeordneten Raum- und Zeitelemente im ersten Fall Raum- und Zeit*intervalle*, in dem zweiten aber Raum- und Zeit*punkte* sind.

Aus den später anzugebenden Gründen werden wir auch ein System der Punkte entwerfen, in dem die *kinematischen* Prädikate als räumlich-zeitliche *Punkt*prädikate eingeführt werden.

1. Einführung des topologischen Raumzeitprädikats und der kinematischen Prädikate in S_I: das System S_{I_τ}

Aus heuristischen Gründen nehmen wir an, daß das in Raum und Zeit existierende, mit O bezeichnete Objekt ein fester Würfel oder Quader ist, der sich, wenn er in Bewegung ist, geradlinig und in eine Richtung bewegt. Dann können die Axiome von S_I nicht nur für a_z, b_z, c_z,... gelten, die über die Zeitstrecken laufen, sondern auch für die ihnen zuzuordnenden a_r, b_r, c_r,..., die über die Räume laufen, die das Objekt O einnehmen kann.

Die Raumzeitposition des Objekts O soll nun ein *dreistelliges* Prädikat

τ – τ(όπος) sein, das die Zuordnung von O, a_z und a_r, τO, a_z, a_r, implizit mittels des *Zuordnungsaxioms*

$$10_{S_{I_\tau}} \quad (a_z)(a_r)(\tau O,a_z,a_r \Rightarrow \neg(\exists b_r)(\neg b_r = a_r \wedge \tau O,a_z,b_r))$$

bestimmt.

$\tau O,a_z,a_r$ bezeichnet eine Raumzeitposition des Objekts O *unabhängig* davon, ob es in a_z in Ruhe oder in Bewegung ist. Der *Ruhezustand* des Objekts O, $\tau_R O,a_z,a_r$, und sein *Bewegungszustand*, $\tau_B O,a_z,a_r$, als *elementare* Zustände, in denen das Objekt dann und nur dann ist, wenn es in allen Teilintervallen von a_z in Ruhe bzw. in Bewegung ist, werden über Raumzeitpositionen des Objekts folgendermaßen definiert:

$$\tau_R O,a_z,a_r \leftrightarrow \tau O,a_z,a_r \wedge (b_z)(b_z \sqsubset a_z \Rightarrow \tau O,b_z,a_r),$$

$$\tau_B O,a_z,a_r \leftrightarrow \tau O,a_z,a_r \wedge (b_z)(b_z \sqsubset a_z \Rightarrow (\exists b_r)(b_r \sqsubset a_r \wedge \tau O,b_z,b_r)) \wedge$$
$$\wedge (c_z)(d_z)(c_r)(d_r)(c_z \sqsubset a_z \wedge d_z \sqsubset a_z \wedge \tau O,c_z,c_r \ \tau O,d_z,d_r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\neg c_z = d_z \Rightarrow \neg c_r = d_r)).$$

Das Objekt ist, diesen Definitionen nach, in einem Zeitintervall dann und nur dann in einem elementaren kinematischen Zustand, wenn es in jedem Teilintervall des Zeitintervalls in einem und demselben kinematischen Zustand ist, was ein kinematisches Analogon des *Axioms Priors* ist.

Um das zu sichern, was man auf jeden Fall sichern wollte, daß nämlich innerhalb eines Bewegungszustands keine Zwischenpositionen in der Raumzeit „übersprungen" werden dürfen und daß es auch zwischen einem Ruhezustand und dem unmittelbar folgenden Bewegungszustand bzw. zwischen einem Bewegungszustand und dem unmittelbar folgenden Ruhezustand keine mögliche Raumzeitposition geben darf, werde das folgende τ-*Kontinuitätsaxiom* eingeführt:

$$11_{S_{I_\tau}} \quad (a_z)(b_z)(a_r)(b_r)((\tau_B O,a_z,a_r \wedge \tau_B O,b_z,b_r) \vee (\tau_R O,a_z,a_r \wedge \tau_B O,b_z,b_r) \vee$$
$$\vee (\tau_B O,a_z,a_r \wedge \tau_R O,b_z,b_r) \Rightarrow (a_z \lessdot b_z \Rightarrow a_r \lessdot b_r)).$$

τ_R und τ_B sind konträre elementare Prädikate. Für sie soll also das folgende τ_R/τ_B-*Aristoteles-Kant*sche *Axiom* gelten:

$$12_{S_{I_\tau}} \quad (a_z)(a_r)(\tau O,a_z,a_r \Rightarrow (\exists b_z)(\exists c_z)(\exists b_r)(\exists c_r)(b_z \lessdot a_z \wedge a_z \lessdot c_z \wedge$$
$$\wedge (\tau_R O,b_z,b_r \vee \tau_B O,b_z,b_r) \wedge (\tau_R O,c_z,c_r \vee \tau_B O,c_z,c_r))).$$

Innerhalb des Systems der Intervalle ist auch die *Punkt*zeitposition des Objekts O als *vierstelliges* Prädikat $\tau^* O,a_z,b_z,c_r$ einzuführen, so daß *per definitionem*

$$
\begin{aligned}
&\tau^* O,a_z,b_z,c_r \overset{df.}{\Leftrightarrow} a_z \lessdot b_z \wedge (\exists a_r)(\exists b_r)(\tau O,a_z,a_r \wedge \tau O,b_z,b_r \wedge \\
&\wedge (a_r = b_r \vee a_r \sqsubset b_r \Rightarrow c_r = a_r) \wedge (b_r \sqsubset a_r \Rightarrow c_r = b_r) \wedge \\
&\wedge (a_r \sqcap b_r \Rightarrow c_r \sqsubset a_r \wedge c_r \sqsubset b_r \wedge \\
&\wedge \neg(\exists d_r)(d_r \sqsubset a_r \wedge d_r \sqsubset b_r \wedge \neg(d_r = c_r \vee d_r \sqsubset c_r))))
\end{aligned}
$$

gilt.

Da die Gültigkeit von $\tau^* O,a_z,b_z,c_r$ *unabhängig* von den Prädikaten τ_R und τ_B definiert ist, ist die *Zeitpunktposition* des Objekts als *bloße* Raumzeit*position* und nicht als Ruhe- oder Bewegungs*zustand* des Objekts zu verstehen. Aristoteles könnte zufrieden sein: „Im Jetzt (ἐν τῷ νῦν) gibt es weder Bewegung noch Ruhe“[26].

2. Einführung des topologischen Raumzeitprädikats und der kinematischen Prädikate in S_P: die Systeme $S_{P_{\bar{\tau}}}$ und $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$

Die Aussage, daß es im Jetzt weder Bewegung noch Ruhe gibt, entspricht auch der ursprünglichen Idee der *statischen* Konzeption der Bewegung, nach der die Bewegung als *Ortsänderung* das bloße Resultat davon ist, daß das Objekt in verschiedenen Augenblicken an verschiedenen Orten ist und *nicht* ein unmittelbar in bezug auf *einen* Zeitpunkt existierender *Zustand*[27]. Wir skizzieren deshalb zunächst das System $S_{P_{\bar{\tau}}}$, in dem $\bar{\tau}_R$ und $\bar{\tau}_B$ als *vier-* bzw. *fünfstellige* Prädikate über $\bar{\tau}$ definiert werden, ähnlich wie τ_R und τ_B in S_{I_r} über τ.

Die Physiker sprechen aber auch über die „Zeitpunktgeschwindigkeiten“, und wenn das kein Euphemismus sein sollte, sollte es auch Bewegungszustände zu einem Zeitpunkt geben. Daher entwerfen wir auch ein alternatives System, das System $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$, in dem $\bar{\bar{\tau}}_R$ und $\bar{\bar{\tau}}_B$ unmittelbar als *dreistellige* Prädikate eingeführt werden.

Wie oben nehmen wir an, daß es sich um die Bewegung handelt, die geradlinig ist und in eine Richtung stattfindet.

In den beiden Systemen bezeichnet $\bar{O}$ einen materiellen Punkt, während $\alpha_z,\beta_z,\gamma_z,\ldots$ über die Zeitpunkte laufen und $\alpha_r,\beta_r,\gamma_r,\ldots$ über die Raumpunkte, in denen $\bar{O}$ sein kann.

In $S_{P_{\bar{\tau}}}$ ist das topologische Prädikat $\bar{\tau}$ ein *dreistelliges* Prädikat, das die Zuordnung von $\bar{O}$, α_z, und α_r, $\bar{\tau}\bar{O},\alpha_z,\alpha_r$, implizit mittels des *Zuordnungsaxioms*

$$10\,S_{P_{\bar\tau}} \quad (\alpha_z)(\alpha_r)(\bar\tau\bar O,\alpha_z,\alpha_r \Rightarrow \neg(\exists\beta_r)(\neg\beta_r \equiv \alpha_r \wedge \bar\tau\bar O,\alpha_z,\beta_r))$$

bestimmt.

Der *Ruhezustand* $\bar\tau_R$ zwischen α_z und β_z, mit $\alpha_z < \beta_z$, wird folgendermaßen als *vierstelliges* Prädikat definiert:

$$\bar\tau_R\bar O,\alpha_z,\beta_z,\alpha_r, \overset{df.}{\Leftrightarrow} \alpha_z < \beta_z \wedge (\gamma_z)(\neg\gamma_z < \alpha_z \wedge \neg\beta_z < \gamma_z \Rightarrow \bar\tau\bar O,\gamma_z,\alpha_r).$$

Der *elementare Bewegungszustand* zwischen α_z und β_z, mit $\alpha_z < \beta_z$, wird als *fünfstelliges* Prädikat $\bar\tau_B\bar O,\alpha_z,\beta_z,\alpha_r,\beta_r$ eingeführt, mit

$$\begin{aligned}&\bar\tau_B\bar O,\alpha_z,\beta_z,\alpha_r,\beta_r \overset{df.}{\Leftrightarrow} \alpha_z < \beta_z \wedge \bar\tau\bar O,\alpha_z,\alpha_r \wedge \bar\tau\bar O,\beta_z,\beta_r \wedge\\ &\wedge (\gamma_z)(\delta_z)(\gamma_r)(\delta_r)(\gamma_z < \delta_z \wedge \neg\gamma_z < \alpha_z \wedge \neg\beta_z < \delta_z \Rightarrow\\ &\Rightarrow (\bar\tau\bar O,\gamma_z,\gamma_r \wedge \bar\tau\bar O,\delta_z,\delta_r \Rightarrow (\gamma_r < \delta_r))).\end{aligned}$$

Das $\bar\tau$-*Kontinuitätsaxiom* lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}11\,S_{P_{\bar\tau}} \quad &(\alpha_z)(\beta_z)(\alpha_r)(\beta_r)(\alpha_z < \beta_z \wedge \alpha_r < \beta_r \wedge \bar\tau\bar O,\alpha_z,\alpha_r \wedge \bar\tau\bar O,\beta_z,\beta_r \Rightarrow\\ &\Rightarrow (\gamma_r)(\alpha_r < \gamma_r \wedge \gamma_r < \beta_r \Rightarrow (\exists\gamma_z)(\alpha_z < \gamma_z \wedge \gamma_z < \beta_z \wedge \bar\tau\bar O,\gamma_z,\gamma_r))).\end{aligned}$$

In $S_{P_{\bar\tau}}$ soll aber *kein* Analogon vom *Aristoteles-Kant*schen *Axiom* gelten. Wenn es nämlich ein solches Analogon gäbe, müßte die Gültigkeit von $\bar\tau\bar O,\gamma_z,\gamma_r$ für gewisse α_z, β_z, γ_z, mit $\neg\gamma_z < \alpha_z \wedge \neg\beta_z < \gamma_z$, *von* $\bar\tau_R\bar O,\alpha_z,\beta_z,\alpha_r \vee \vee\ \bar\tau_B\bar O,\alpha_z,\beta_z,\alpha_r,\beta_r$ *abhängen.* Es ist aber *wesentlich* für ein System der Punkte, daß es, weil *per definitionem* die Gültigkeit von $\bar\tau_R\bar O,\alpha_z,\beta_z,\alpha_r$ und $\bar\tau_B\bar O,\alpha_z,\beta_z,\alpha_r,\beta_r$ von $\bar\tau\bar O,\gamma_z,\gamma_r$ für je drei α_z, β_z, γ_z, mit $\neg\gamma_z < \alpha_z \wedge \neg\beta_z < < \gamma_z$, abhängt, keine umgekehrte Abhängigkeit geben soll.

In dem alternativen System $S_{P_{\bar{\bar\tau}_R/\bar{\bar\tau}_B}}$ ist schon die Raumzeitpunktposition des Objekts $\bar O$ ein Ruhe- oder ein Bewegungszustand. Die zwei Zustände werden deshalb durch *dreistellige* Prädikate, $\bar{\bar\tau}_R$ und $\bar{\bar\tau}_B$, bezeichnet, für die das folgende *Zuordnungsaxiom* gilt:

$$\begin{aligned}10\,S_{P_{\bar{\bar\tau}_R/\bar{\bar\tau}_B}} \quad &(\alpha_z)(\alpha_r)(\bar{\bar\tau}_R\bar O,\alpha_z,\alpha_r \vee \bar{\bar\tau}_B\bar O,\alpha_z,\alpha_r \Rightarrow\\ &\Rightarrow \neg(\exists\beta_r)(\neg\alpha_r \equiv \beta_r \wedge (\bar{\bar\tau}_R\bar O,\alpha_z,\beta_r \vee \bar{\bar\tau}_B\bar O,\alpha_z,\beta_r))).\end{aligned}$$

$\bar{\bar\tau}_R$ und $\bar{\bar\tau}_B$ sollen *konträre* Prädikate sein, daher:

$$11\,S_{P_{\bar{\bar\tau}_R/\bar{\bar\tau}_B}} \ (\alpha_z)(\alpha_r)(\bar{\bar\tau}_R\bar O,\alpha_z,\alpha_r \Rightarrow \neg\bar{\bar\tau}_B\bar O,\alpha_z,\alpha_r) \wedge (\bar{\bar\tau}_B\bar O,\alpha_z,\alpha_r \Rightarrow \neg\bar{\bar\tau}_R\bar O,\alpha_z,\alpha_r)).$$

Obwohl $\bar{\bar\tau}_R$ und $\bar{\bar\tau}_B$ laut $11\,S_{P_{\bar{\bar\tau}_R/\bar{\bar\tau}_B}}$ konträre Prädikate sind, ist der Unterschied zwischen ihnen unmittelbar nicht erkennbar. Er soll aber mittelbar aus den Folgen feststellbar sein, die die Zuschreibung des einen und des anderen Prädikats verursacht. Dazu dient zunächst das Axiom

$$12S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}} \quad (\alpha_z)(\alpha_r)(\bar{\bar{\tau}}_B\bar{O},\alpha_z,\alpha_r \Rightarrow (\beta_z)(\alpha_z < \beta_z \Rightarrow \neg\bar{\bar{\tau}}_B\bar{O},\beta_z,\alpha_r \wedge \neg\bar{\bar{\tau}}_R\bar{O},\beta_z,\alpha_r)),$$

das als *Solizitierensaxiom* bezeichnet werden kann: Wenn das Objekt in einem Zeitpunkt im *solizitierten* Zustand ist, kann es an der Stelle nicht mehr bleiben, und insofern ist der solizitierte Zustand schon ein *Zeitpunktzustand* der Bewegung.

Nun ist der Unterschied zwischen dem Ruhe- und dem Bewegungszustand in einem Zeitpunkt über den durch $12S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$ *implizierten* Unterschied zwischen dem Ruhe- und dem Bewegungszustand im Zeitintervall zu erkennen, wobei sie als *vier-* bzw. *fünfstellige* Prädikate $\bar{\bar{\tau}}^*_R$ und $\bar{\bar{\tau}}^*_B$ über $\bar{\bar{\tau}}_R$ bzw. $\bar{\bar{\tau}}_B$ folgendermaßen definiert werden:

$$\bar{\bar{\tau}}^*_R\bar{O},\alpha_z,\beta_z,\alpha_r \hookleftarrow\!\!\!\rightarrow \alpha_z < \beta_z \wedge (\gamma_z)(\neg\gamma_z < \alpha_z \wedge \beta_z < \gamma_z \Rightarrow \bar{\bar{\tau}}_R\bar{O},\gamma_z,\alpha_z),$$

$$\bar{\bar{\tau}}^*_B\bar{O},\alpha_z,\beta_z,\alpha_r,\beta_r \hookleftarrow\!\!\!\rightarrow \alpha_z < \beta_z \wedge (\gamma_z)(\neg\gamma_z < \alpha_z \wedge \beta_z < \gamma_z \Rightarrow (\exists\gamma_r)\bar{\bar{\tau}}_B\bar{O},\gamma_z,\gamma_r).$$

Das $\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B$-*Kontinuitätsaxiom* ist ähnlich wie die obigen τ- und $\bar{\tau}$-Kontinuitätsaxiome einzuführen, nämlich:

$$\begin{aligned}&13S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}} \quad (\alpha_z)(\alpha_r)(\bar{\bar{\tau}}_R\bar{O},\alpha_z,\alpha_r \vee \bar{\bar{\tau}}_B\bar{O},\alpha_z,\alpha_r \Rightarrow\\ &\Rightarrow (\beta_z)(\beta_r)(\alpha_z < \beta_z \wedge \alpha_r < \beta_r \wedge (\bar{\bar{\tau}}_R\bar{O},\beta_z,\beta_r \vee \bar{\bar{\tau}}_B\bar{O},\beta_z,\beta_r) \Rightarrow\\ &\Rightarrow (\gamma_r)(\alpha_r < \gamma_r \wedge \gamma_r < \beta_r \Rightarrow\\ &\Rightarrow (\exists\gamma_z)(\alpha_z < \gamma_z \wedge \gamma_z < \beta_z \wedge (\bar{\bar{\tau}}_R\bar{O},\gamma_z,\gamma_r \vee \bar{\bar{\tau}}_B\bar{O},\gamma_z,\gamma_r))))).\end{aligned}$$

3. Die wesentlichen Unterschiede zwischen S_{I_τ}, $S_{P_{\bar{\tau}}}$ und $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$

Der Hauptunterschied zwischen $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$ auf der einen und S_{I_τ} und $S_{P_{\bar{\tau}}}$ auf der anderen Seite liegt darin, daß es in $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$ zwei verschiedene, konträre Prädikate $\bar{\bar{\tau}}_R$ und $\bar{\bar{\tau}}_B$ gibt, von denen das eine oder das andere dem Objekt und den ihm zugeordneten Zeit- und Raumpunkten zugeschrieben werden, während es in S_{I_τ} sowie in $S_{P_{\bar{\tau}}}$ nur ein Prädikat gibt, τ^* bzw. $\bar{\tau}$, das, im Gegensatz zu $\bar{\bar{\tau}}_R$ und $\bar{\bar{\tau}}_B$, die Zeitpunktposition des Objekts als einen *bloß topologischen* und *nicht* als einen *kinematischen* Zustand bezeichnet.

Aus diesem Hauptunterschied, der die *Zeitpunkt*prädikate betrifft, folgen die Unterschiede zwischen den *kinematischen Intervall*prädikaten, die grundsätzlich *analog* zu den Unterschieden zwischen den *physikalischen Intervall*prädikaten im System der Punkte und in den Systemen der Intervalle sind. Sie betreffen nämlich die Möglichkeit, daß $\bar{\bar{\tau}}^*_R$ oder

$\bar{\bar{\tau}}^*_B$ für ein offenes oder halb-offenes Intervall gilt, ohne daß $\bar{\bar{\tau}}^*_R$ bzw. $\bar{\bar{\tau}}^*_B$ auch für das entsprechende abgeschlossene Intervall gilt, was nicht nur in S_{I_τ}, wegen des Analogons des *Axioms Priors*, sondern auch in $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$, wegen des $\bar{\tau}$-*Kontinuitätsaxioms*, unmöglich ist (der Beweis wird dem Leser überlassen).

Die Tatsache, daß S_{I_τ} und $S_{P_{\bar{\tau}}}$ in dieser Hinsicht *nicht* wesentlich verschieden sind, beruht darauf, daß $\bar{\tau}_R$ und $\bar{\tau}_B$ in $S_{P_{\bar{\tau}}}$ als *relationale* Prädikate über $\bar{\tau}$ definiert sind, die für Raumzeitpunkt*kontinua* gelten und für einen *einzigen* Raumzeitpunkt *nicht* gelten können, so daß eine Endzeitpunktposition einen Unterschied in der Gültigkeit von $\bar{\tau}_R$ bzw. $\bar{\tau}_B$ nur dann bringen könnte, wenn der dem Zeitpunkt zugeordnete *Raum*punkt *getrennt* von den Punkten des entsprechenden offenen Raumintervalls wäre, was aber wegen des $\bar{\tau}$-*Kontinuitätsaxioms* nicht so sein kann.

Alle nichtaufhebbaren Unterschiede zwischen S_{I_τ} und $S_{P_{\bar{\tau}}}$ sind daher nur noch diejenigen, die von der Gültigkeit des Analogons des *Aristoteles-Kant*schen *Axioms* in S_{I_τ} und seiner Nicht-Gültigkeit in $S_{P_{\bar{\tau}}}$ abhängen. So ist es zum Beispiel unmöglich, dem S_{I_τ} gemäß, daß das Objekt innerhalb eines Zeitintervalls in *unendlich* vielen, *verschiedenen* kinematischen Zuständen ist, was in bezug auf die in $S_{P_{\bar{\tau}}}$ definierten Zustände $\bar{\tau}_R$ und $\bar{\tau}_B$ möglich sein sollte. Dabei ist es wichtig, daß eine unendliche Anzahl der untereinander verschiedenen Zustände innerhalb eines Intervalls dem $\bar{\tau}$-*Kontinuitätsaxiom* (sowie dem $\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B$-*Kontinuitätsaxiom*) nicht widerspricht, was praktisch von Adolf Grünbaum semi-formal gezeigt wurde[28].

4. Die Vor- und Nachteile der mit topologischen und kinematischen Prädikaten erweiterten Logik der Intervalle und Logik der Punkte

a) Phänomenologische und substantielle kinematische Zustände

Im Gegensatz zu den phänomenologischen physikalischen Eigenschaften hat man nur selten geglaubt, daß es Zeitintervalle gebe, in denen – vom *ontologischen*, nicht bloß epistemologischen Standpunkt – einem Objekt der Bewegungszustand erst dann zuschreibbar sei, wenn er ihm in einem größeren, einschließenden Intervall zuschreibbar ist. Wenn jemand doch, wie David Hilbert z.B., das für nötig hält, um gewisse kinematische Paradoxa lösen zu können[29], könnte er trotzdem solche *phänomenologischen kinematischen Zustände* genauso *gleich* wie die *substantiellen* in S_{I_τ} behandeln, *ohne* daß damit der *semantische* Unterschied zwischen den beiden verschwindet, was ihm demzufolge ermöglichen würde, den Unterschied zwischen den phänomenologischen und substantiellen Zuständen in einer Modallogik eventuell auch syntaktisch zu definieren.

In $S_{P_{\bar{\tau}}}$ ist dagegen der Bewegungszustand über die Raumzeit*punkt*positionen *definiert*, und da *jede* Raumzeitpunktposition einem materiellen Punkt zuschreibbar sein sollte – nur, wenn das dem $\bar{\tau}$-*Kontinuitätsaxiom* nicht widerspricht –, ist dem materiellen Punkt in einem jeden kontinuierlichen Raumzeitintervall $\bar{\tau}_B$ zuschreibbar, unabhängig davon, in welcher Position er *außerhalb* dieses Intervalls ist. In $S_{P_{\bar{\tau}_R/\bar{\tau}_B}}$ ist es *a fortiori* so, weil es dort einen Bewegungszustand schon in einem einzigen Raumzeitpunkt gibt.

b) Zeitpunktgeschwindigkeit

$S_{P_{\bar{\tau}_R/\bar{\tau}_B}}$ würden die Newtonianer auswählen, die über die *aktualen Zeitpunktgeschwindigkeiten* sprechen wollten, um sie bei der Formulierung der Gesetze der Newtonschen Mechanik unter die Bedingungen des Anfangszustands der bewegten Objekte einschließen zu können.

Wenn jemand die Gesetze der Newtonschen Mechanik haben wollte und gleichzeitig, wie Erwin Schrödinger, meinen würde, daß der Begriff von „Zeitpunktgeschwindigkeit" ein „Kunstgriff" ist, „... der ... *der Natur nicht genügend angepaßt*" ist[30], müßte er versuchen, diese Gesetze innerhalb der *Logik der Intervalle umzuformulieren.* Eine solche Herausforderung kann im Rahmen dieses Textes nicht angegangen werden[31].

Eine andere Richtung, auf die Schrödinger hinweist[32], wäre für diejenigen Physiker und Philosophen offen, die, wie Bohr[33], die *Quantenmechanik* als ein Beispiel dafür nehmen, daß die *klassische Mechanik* streng genommen nur eine *approximative* Gültigkeit haben könne.

Von der Antwort auf diese hier nicht zu beantwortenden Fragen hängt ab, ob die Existenz der *kinematischen* Zeitpunktposition in den Modellen für $S_{P_{\bar{\tau}_R/\bar{\tau}_B}}$ als ein Vorteil dieses Systems über S_{I_τ} und $S_{P_{\bar{\tau}}}$ zu verstehen ist.

c) *Kinematische Zustände in den abgeschlossenen und offenen Intervallen*

Da die *Unterschiede* zwischen den kinematischen Intervallprädikaten in $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$ auf der einen und S_{I_τ} und $S_{P_{\bar{\tau}}}$ auf der anderen Seite analog zu denen zwischen den physikalischen Intervalleigenschaften in S_{P_1} und $S_{I_1}-S_{I_5}$ sind, sind auch die *Vor-* und *Nachteile* analog zu bewerten.

Es soll in einem Modell von $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$ möglich sein, in einem *abgegrenzten* Zeitintervall in Bewegung zu sein, *ohne* daß es einen Anfangs- oder Endzeitpunkt der Bewegung gibt, weil $\bar{\bar{\bar{\tau}}}^*_B$ über $\bar{\bar{\bar{\tau}}}_B$ definiert ist, das dem Objekt in jedem Raumzeitpunkt eines offenen oder halb-offenen Intervalls zugeschrieben werden kann, ohne daß es damit auch dem *Anfangs-* oder *End*raumzeitpunkt des entsprechenden abgeschlossenen Raumzeitintervalls zugeschrieben werden muß.

Eine solche *Seltsamkeit* gibt es wegen der Gültigkeit des $\bar{\tau}$-*Kontinuitätsaxioms* in $S_{P_{\bar{\tau}}}$, in dem $\bar{\tau}_B$ über $\bar{\tau}$ definiert ist, zwar nicht, weil die Tatsache, daß $\bar{\tau}$ für die zugeordneten Anfangs- bzw. Endpunkte des abgeschlossenen Raumzeitintervalls gelten muß, das dem offenen, in dem sich das Objekt bewegt, entspricht, die Anwesenheit der Bewegung in dem abgeschlossenen Zeitintervall garantiert. Wenn man aber erlauben würde, daß das bewegte Objekt ein nicht für immer existierendes Objekt ist, würde es dann, wie Paul Benacerraf semi-formal gezeigt hat[34], *auch* in einem Modell von $S_{P_{\bar{\tau}}}$ möglich sein, in einem Zeitintervall in Bewegung zu sein, ohne daß es den Endzeitpunkt der Bewegung gibt. Das Objekt könnte nämlich in dem Endpunkt des Zeitintervalls *verschwinden.*

Keine entsprechende Seltsamkeit gäbe es in S_{I_τ}, auch dann, wenn es sich um ein nicht für immer existierendes Objekt handeln würde, weil dort *Priors Axiom* einen Unterschied zwischen den Bewegungszuständen in offenen und in abgeschlossenen Intervallen ausschließt.

d) *Unendlich viele innerhalb eines Zeitintervalls bestehende kinematisch verschiedene Zustände*

Man kann auf jeden Fall erwarten, daß die merkwürdige, nur mit den zugedrückten Augen akzeptierbare Seltsamkeit eines Modells der mit physikalischen Prädikaten erweiterten Logik der Punkte in bezug auf die maximal mögliche Anzahl der physikalisch verschiedenen Teilintervalle eines Intervalls, die aus der Nicht-Gültigkeit des *Aristoteles-Kant-*

schen *Axioms* folgt, ihr Analogon in den Modellen von $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}}}$ und $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$ haben muß. Dieses Analogon ist aber nicht nur *seltsam*, sondern fast *paradoxal* – zumindest dann, wenn man die Cantorsche Lehre über die *Ordnungs*zahlen ins Auge faßt, die für Modelle von $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}}}$ und $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$ gilt – weil es nun möglich ist, die *Abfolge* der *kinematisch verschiedenen* Zustände auch *vom Standpunkt des Bewegten selbst* zu beobachten. Um das zu zeigen, brauchen wir die Hilfe von Zeus, der sich anstatt Achilles *staccato* bewegen und seine immer kleineren „Schritte" zählen würde, der uns *im gegebenen Zusammenhang* – im Gegensatz zu dem christlichen Gott, der vielleicht auch das Unfaßbare fassen kann – jedoch hinreichend ähnlich ist.

Es soll nach $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}}}$ und $S_{P_{\bar{\bar{\tau}}_R/\bar{\bar{\tau}}_B}}$ möglich sein – und Grünbaum hat das ohne Zögern akzeptiert[35] –, daß man ein Ziel *nach den unendlich vielen durch Unterbrechungen differenzierten Schritten* erreichen kann.

Wir wollen voraussetzen, daß es Zeus ist, der diese Schritte macht[36]. Für Zeus sollte es keine empirischen Beschränkungen geben: Er *könnte* den ersten, den zweiten, den dritten, ..., und immer jeden folgenden Schritt *machen* und er *könnte* auch die Schritte *zählen*. Nun liegt das Problem nicht darin, daß die Schritte früher oder später sehr, sehr klein werden müßten – wenn das durch unendlich viele Schritte zu erreichende Ziel eine begrenzte Strecke weit sein soll – und daß sie früher oder später in sehr, sehr kurzen Zeitintervallen gemacht werden müßten. Eine *solche* Schwierigkeit wäre durch Zeus' Gottheit *aufgehoben*. Das Problem liegt *darin*, daß es sich hier nicht nur um die Kardinal-, sondern auch um die *Ordnungs*zahlen handelt, die den Schritten *sukzessiv* zuzuordnen wären, so daß Zeus sein Ziel nicht erreichen könnte, ohne daß er einen ω-*Schritt* machte. Es genügt hier nicht zu behaupten, daß, obwohl jeder Schritt ein endlicher ist, es $\aleph_0$ Schritte geben kann. *Von Zeus' Standpunkt* handelt es sich offenbar um *Ordnungs*zahlen, und keine endliche Ordnungszahl ist hinreichend. Der ω-*Schritt* ist aber nicht *Schritt für Schritt* – ohne „Sprung" – zu erreichen[37], weil die Endlichkeit der Ordnungszahlen *rekursiv*, d.h. Schritt für Schritt, *erhalten wird*.

Es ist ganz unklar, wie das Problem innerhalb einer Logik der Punkte zu lösen wäre. Cantor hat zugegeben, daß der Schritt, den Zeus hier braucht, nicht *sukzessiv* erreichbar sei, und die Schritte des Zeus sind *per definitionem* sukzessiv.

Nach S_{I_τ} gibt es keine analoge Schwierigkeit. Aristoteles selbst hat aber fälschlicherweise gemeint, daß das Ziel in der beschriebenen Situation erreichbar sein *müsse*[38]. Es ist *nicht* die Erreich*barkeit* des Zieles das, was notwendig ist. Notwendig ist nur, laut S_{I_τ}, daß das Ziel immer nur durch endlich viele Schritte *erreicht wird*. Zeus, und nicht etwa Achilles, *könnte* immer neue, kleinere und kürzer dauernde Schritte machen, nur daß er *so* nie zum Ziel käme, sondern immer noch *unterwegs* wäre. So etwas machte zwar in unserer, menschlichen, Welt keinen Sinn, aber es gibt *nichts Unbegreifliches* darin, wie es in der Behauptung, daß Zeus den ω-Schritt gemacht hat, gibt.

Die *Verträglichkeit* der zwei Standpunkte, von *Zeus'*, der immer neue, kleinere Schritte machen *kann*, ohne daß er damit das Ziel, dem die Schritte konvergieren, *je* erreichen *könnte*, und *unserem*, menschlichen, nach dem die ganze Zeit, in der Zeus seine Schritte macht, *notwendig vorbei* sein wird, ist erst in einer *Modallogik* – weil es sich um *Modalitäten* handelt – oder vielleicht noch eher in der *Logik der Relevanz* – weil es sich grundsätzlich um Unhaltbarkeit (*incotenability*) der zwei Standpunkte handelt[39] – formal zu definieren. Es gibt aber in dem Modell von S_{I_τ} nichts *an sich* Paradoxes, das die *Anzahl* der kinematischen Zustände innerhalb eines Intervalls betrifft. Nach *jedem* der beiden, zusammen unhaltbaren Standpunkte, von Zeus und unserem, ist die *Anzahl* der innerhalb eines Intervalls *gemachten* Schritte auf jeden Fall *endlich*, genau wie in dem Modell von S_{I_τ}.

C. *Die allgemeine Schlußfolgerung*

Es zeigte sich, daß die Logik der Intervalle und die Logik der Punkte *an sich wesentlich äquivalent* und nur *trivial verschieden* sind[40]. Das ist so zu verstehen, daß in bezug auf die Struktur des Raums und der Zeit *selbst* eine *Intervallontologie* und eine *Punktontologie gleich gut* sein sollten.

In *diesem* Zusammenhang *allein* ist deshalb die Frage der Gültigkeit von *Zenons Axiom*[41] durch die *Cantorsche Kontinuumslehre* als beantwortet zu akzeptieren. Die *Mathematiker* dürften über die aus Punkten bestehenden Intervalle sprechen.

Das bedeutet gleichzeitig, daß die Mathematiker nicht aus dem Paradies vertrieben werden müssen, in das sie Cantor geleitet hat. Keine *wei-*

teren Gründe, die die eine oder die andere Ontologie bevorzugen, sollten dabei etwas ändern.

Aber Hilbert selbst, der den obigen Satz über das *Cantorsche Paradies* formuliert hat, war in bezug auf die *physikalische* Welt ein *Finitist*[42]. Ungeachtet der Gründe, aus denen er Finitist war, und der Weise, auf die er die Zenonschen kinematischen Paradoxa zu lösen versuchte, kann man von seiner Einstellung lernen, daß eine akzeptable *mathematische* Lehre über die Struktur des Raums und der Zeit noch keine richtige *Ontologie der physikalischen* Welt mit sich bringen muß, wie Cantor das meinte[43]. Es muß nämlich nicht so sein, daß es, weil S_I und S_P semantisch äquivalent sind, *egal* ist, ob man annimmt, daß die physikalischen Eigenschaften und die topologischen und kinematischen Zustände *ursprünglich* den Intervallen oder den Punkten zukommen.

Es zeigte sich, daß eine mit den physikalischen Eigenschaften und den kinematischen Zuständen *erweiterte Punktontologie Seltsamkeiten* und sogar *Paradoxien* enthält, während eine *erweiterte Intervallontologie* nur gewisse – vielleicht nicht unaufhebbare – Schwierigkeiten hat, die Newtonschen Physiker zu befriedigen. Das in *diesem* Zusammenhang verstandene *Axiom Zenons* ist immer noch, auch nach dem 19. Jahrhundert, für gültig zu halten.

Allein in *diesem* Zusammenhang kann man die *dynamische* und die *statische* Konzeption der Bewegung[44] als immer noch *verschiedene* und – wie es scheint – *nicht gleich gute* Konzeptionen verstehen.

Literatur

Aristoteles, *Physik* (griechisch-deutsch), übersetzt mit einer Einleitung und mit Anmerkungen hrsg. von Hans Günter Zekl, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1988.

Arsenijević, M. [1992], „Eine aristotelische Logik der Intervalle, die Cantorsche Logik der Punkte und die physikalischen und kinematischen Prädikate (I)", *Philosophia Naturalis* 29 (Heft 2), 1992.

Arsenijević, M. [1989], „How many physically distinguished parts can a limited body contain", *Analysis*, Vol. 49 No. 1, Jan. 1989.

Arsenijević, M. [1988], „Solution of the *staccato* version of the Achilles Paradox", *Contemporary Yugoslav Philosophy: The Analytic Approach*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1988.

Benacerraf, P. [1962], „Tasks, Super-Tasks and the Modern Eleatics", *Journal of Philosophy*, Vol. LIX 24, 1962.

Bohr, N. [1948], „On the Notions of Causality and Complementarity", *Dialectica* 2, 1948.
Cantor, G. [1962], *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind, hrsg. von Ernst Zermelo, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962.
Carnap, R. [1928], *Der logische Aufbau der Welt*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1928.
Čapek, M. [1971], „The Fiction of Instants", *Studium Generale* 24, 1971.
Grünbaum, A. [1968], *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, George Allen and Unwin Ltd., London, 1968.
Hilbert, D. [1925], „Über das Unendliche", *Mathematische Annalen* 95, 1925.
Hilbert, D. und Bernays, P. [1968] (Erste Auflage 1934), *Grundlagen der Mathematik* I, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1968.
Kant, I., *Kritik der reinen Vernunft*, hrsg. von Dr. Albert Görland, verlegt bei Bruno Cassirer, Berlin 1922 (Numerierung der Seiten nach der Originalausgabe (*B*) aus dem Jahre 1787).
Kant, I. [1786], *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, bey Johann Friedrich Hartknoch, 1786.
Russell, B. [1903], *The Principles of Mathematics*, George Allen and Unwin Ltd., London, 1903.
Schrödinger, E. [1932], „Über Indeterminismus in der Physik", in *Über Indeterminismus in der Physik; Ist die Naturwissenschaft Milieubedingt*, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1932.

Anmerkungen

1 *Cf.* Arsenijević [1992].
2 S_I enthält neun Axiome sowie S_P (siehe Arsenijević [1992], §§ 4, 5).
3 *Cf.* Kant [1786], Erstes Hauptstück: Phoronomie.
4 Um der Allgemeingültigkeit des Beispiels willen können „rot" und „nichtrot" (mit Anführungsstrichen) für beliebige *substantielle* Eigenschaften stehen (*Cf.* unten, 7a), die jedem beliebig kleinen Raumintervall zuschreibbar sind.
5 „Berühren" bedeutet hier „im unmittelbaren physikalischen Kontakt stehen".
6 *Cf.* Arsenijević [1989], S. 38.
7 *Cf.* Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, S. 466.
8 Ein Ganzes ist nur dann *compositum ideale*, wenn für jedes seiner Teile gilt, daß es keine Selbständigkeit in bezug auf gewisse andere Teile des Ganzen hat, d.h. wenn es selbst ein Ganzes ist, das unabhängig von gewissen Teilen des ursprünglichen Ganzen nicht existieren kann.
9 Ein Ganzes ist nur dann *compositum reale*, wenn es aus elementaren Teilen besteht, die ineinander nicht eingeschlossen sind und insofern unabhängig voneinander existieren können.
10 Aristoteles, *Physik*, 226b 23.
11 Obwohl der angegebene Grund den Namen des Axioms rechtfertigen

kann, bedeutet das jedoch *nicht*, daß die entsprechende Behauptung bei Aristoteles oder Kant zu finden ist. Würde man vielmehr die physikalische Einheit im rein Aristotelischen Sinn verstehen, d.h. als etwas in sich Kontinuierliches und Gleichgeartetes, dessen Teile nicht aktual sind (*Cf. Physik*, 185b 9–196a 3, 227b ff., 236b 7), dann wäre nurmehr die *These* der Zweiten Antinomie Kants (*Cf.* Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, S. 460) wahr, weil dann – wie ich unten zeigen werde – 11 S_{I_0} impliziert, daß ein begrenzter Raum nur endlich viele solche Einheiten enthalten kann.

12 Die Existenz eines physikalisch unteilbaren Teils könnte z.B. folgendermaßen gesichert werden: $(\exists a)\neg(\exists b)(\exists c)(b \sqsubset a \wedge c \sqsubset a \wedge (\Diamond(Fb \wedge -Fc) \vee \Diamond(-Fb \wedge Fc)))$, wobei F und $-F$ für je zwei konträre elementare Prädikate stehen.

13 *Cf.* Carnap [1928], S. 163 ff.

14 *Cf.* Arsenijević [1992], S. 173.

15 Man kann z.B. auf diese Weise die Textstelle 263a 7 in Aristoteles' *Physik* verstehen.

16 Im gegebenen Zusammenhang machte es kaum einen Sinn, in einem System S_{I_6} φ_5^* und $-\varphi_5^*$ als Eigenschaften der Punkte, die zu physikalisch *gleichgearteten* Intervallen gehören, miteinander und demzufolge mit $-\psi_5^*$ zu identifizieren, um zu erreichen, daß alle Punkteigenschaften entweder identisch oder kontradiktorisch sind, weil die dabei gemeinte Ähnlichkeit zwischen φ_5^* und $-\varphi_5^*$ (und deren Nicht-Ähnlichkeit mit ψ_5^*) die Eigenschaften höherer Ordnung sind und nicht die physikalischen Eigenschaften, um die es sich hier handelt. – Man kann aber natürlich mehrere oder alle der oben auf verschiedene Weise definierten Punktprädikate *gleichzeitig* einführen, wenn es einen möglichen Grund dafür gäbe, und so verschiedene, ***kombinierte*** Systeme bekommen.

17 $\bar{\varphi}_3^*\alpha,\beta \overset{df.}{\Leftrightarrow} (\gamma)(\delta)(\alpha < \gamma \wedge \gamma < \delta \wedge \neg\beta < \delta \Rightarrow \bar{\varphi}_1^*\gamma,\delta)$,

$\bar{\varphi}_4^*\alpha,\beta \overset{df.}{\Leftrightarrow} (\gamma)(\delta)(\neg\gamma < \alpha \wedge \gamma < \delta \wedge \delta < \beta \Rightarrow \bar{\varphi}_1^*\gamma,\delta)$.

18 S_{I_6} (siehe oben, die Fußnote 16) wäre von S_{P_1} wesentlich verschieden, weil nach S_{P_1} die Eigenschaft, die dem Endpunkt eines Intervalls zukommt, immer auch den anderen Punkten des Intervalls zukommen kann, unabhängig davon, ob sie den Punkten des an das gegebene Intervall sich anschließenden Intervalls zukommt oder nicht, so daß es in S_{P_1} keinen Unterschied zwischen den superponierten und nicht-superponierten Eigenschaften geben kann.

19 *Priors Axiom* genügt, weil $\neg\varphi b$ verlangte, daß für ein gewisses f, mit $f \sqsubset b$, $-\varphi f$ gilt.

20 Da das Theorem unabhängig von der mit $\lessdot$ bzw. $\gtrdot$ implizierten Richtung für *jedes Paar* der konträren elementaren Prädikate gilt, kann es zwischen *je zwei Enden* eines begrenzten Raums nur endlich viele physikalisch verschiedene angeordnete Räume geben, was bedeutet, daß auch ein physikalischer mehrdimensionaler Raum bzw. ein physikalischer Körper ebenso wie eine physikalische Zeit nur endlich viele physikalisch untereinander nicht-gleichgeartete Teile enthalten kann.

21 Verschiedene Änderungen werden mathematisch durch verschiedene Funktionen definiert.
22 Nehmen wir an, daß die Temperatur in *a* von 2 °C bis 5 °C und in *b* von 5 °C bis 7 °C verändert wird.
23 Siehe oben, § 5.
24 *Cf.* Arsenijević [1989], S. 38.
25 In die beiden Systeme können später die sekundären Objekte eingeführt werden, ein nicht-ausgedehntes in S_I und ein ausgedehntes in S_P.
26 Aristoteles, *Physik*, 239b 1. Daß es im Jetzt weder Bewegung noch Ruhe gibt, bedeutet aber nicht, daß innerhalb einer Intervallontologie die Zeitpunktposition eine Fiktion – wie bei Milić Čapek (*Cf.* Čapek [1971]) – ist. Es handelt sich nur darum, daß ein topologisches Prädikat kein kinematisches Prädikat sein muß.
27 „Es gibt keine solche Sache wie einen Änderungszustand" (Russell [1903], S. 471).
28 Grünbaum [1968], §§ 4, 5.
29 *Cf.* Hilbert & Bernays [1968], S. 16.
30 Schrödinger [1932], S. 9.
31 Es scheint aber klar zu sein, daß „Geschwindigkeit" und „Beschleunigung" bei einer solchen Darstellung elementare Prädikate sein müßten.
32 Schrödinger [1932], S. 16.
33 *Cf.* Bohr [1948], S. 313.
34 *Cf.* Benacerraf [1962].
35 *Cf.* Grünbaum [1968], S. 94 ff.
36 In der zweiten Beweisreihe Zenons gegen die Möglichkeit der Bewegung läuft Achilles *legato* (*Cf.* Aristoteles, *Physik*, 239b 14).
37 *Cf.* Cantor [1962], S. 445.
38 Das soll aus seinem (nicht konklusiven) Beweis in der *Physik*, 237b 34 folgen, in dem es sich um die kinematischen Zustände, die in bezug auf Geschwindigkeit nicht gleichgeartet sind, handelt. Für den Beweis ist es egal, ob die kinematisch verschiedenen Zustände auf diese Weise differenziert werden, oder – wie hier – durch τ_R und τ_B.
39 *Cf.* Arsenijević [1988], S. 48–51.
40 *Cf.* Arsenijević [1992].
41 *Ibid.*, S. 161, 163.
42 *Cf.* Hilbert [1925].
43 *Cf.* Cantor [1962], S. 275.
44 *Cf.* Arsenijević [1992], §§ 2, 3.

Anschrift des Verfassers:

Philosophisches Seminar
Universität Heidelberg
Marsiliusplatz 1
6900 Heidelberg 1
BR Deutschland

Department of Philosophy
University of Belgrade
Čika Ljubina 18–20
11000 Belgrade
Yugoslavia