Miloš Arsenijević

# Eine aristotelische Logik der Intervalle, die Cantorsche Logik der Punkte und die physikalischen und kinematischen Prädikate

## Teil I: Logik der Punkte und Logik der Intervalle*

Obwohl es unmöglich ist, präzis zu sagen, wann der Begriff des *ausdehnungslosen Punktes* entstanden ist, und ob schon gewisse Pythagoreer bei dem Aufbau der Welt aus Punkten, Linien und Flächen die in wenigstens einer Dimension ausdehnungslosen Entitäten als Bauelemente benutzten[1], folgt sowohl aus Aristoteles' Deutung dessen, was er als Zenons Axiom bezeichnete[2], als auch aus den späteren Quellen, die angeblich wörtlich die Beweisreihen Zenons gegen die Möglichkeit einer pluralistischen Welt zitieren[3], daß es sich in diesen Beweisreihen Zenons unter anderem um die Widerlegung einer *Punktontologie* handelt, nach der die Entitäten höherer Dimensionen aus den Entitäten niedrigerer Dimensionen aufgebaut werden sollten.

Zenon hat aber gleichzeitig eine *Intervallontologie,* nach der die Bauelemente der Welt die *ausgedehnten und immer weiter teilbaren* Entitäten sind, widerlegt.

Bis zur zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde *Zenons Axiom,* das keine μετάβασις von den Entitäten niedrigerer Dimensionen zu den Entitäten höherer Dimensionen erlaubt, nicht verneint.

Aristoteles hat aber nicht alle Voraussetzungen angenommen, die zur Widerlegung der Intervallontologie ohne ein kleinstes Intervall führten, und er hat gleichzeitig eine andere, umgekehrte μετάβασις von den Entitäten höherer zu den Entitäten niedrigerer Dimensionen erlaubt. Die null-, ein- und zweidimensionalen Entitäten sind nämlich als Grenzen und nicht als Bauelemente verstanden[4]. Die einzige Konkurrenz seiner wegen der Nicht-Existenz der minimalen Bauelemente als *Indefinitismus* bezeichneten Intervallontologie[5] war der *Atomismus*[6].

Mit dem „großen Streit unter den Philosophen [...], von denen einige dem *Aristoteles,* andere dem *Epikur* gefolgt sind", war Cantor genau darum nicht zufrieden, weil „die *Theoretiker* [...] entweder über die *letzten* Elemente der *Materie* eine völlige Unbestimmtheit herrschen lassen, oder [...] sie dieselben als sogenannte *Atome* von zwar *sehr kleinem* aber doch *nicht gänzlich verschwindendem Rauminhalte* annehmen“[7].

Nach der *Verneinung des Axioms Zenons* in Cantors *Kontinuumslehre* wurde die Punktontologie nicht nur von den Physikern herzlich begrüßt, die besonders nach Newton eine solche Begründung ihrer Theorien brauchten, sie wurde auch von der Mehrheit der Philosophen angenommen[8]. Es ist aber merkwürdig, daß trotz der überall verwendeten symbolischen Logik eine *Logik der Intervalle,* im Gegensatz zur Cantorschen *Logik der Punkte,* nur selten und nicht im gegebenen Zusammenhang entworfen[9] und ein formaler Vergleich zwischen den beiden noch nie durchgeführt wurde.

Es wurde noch nicht einmal geprüft, ob die Logik der Punkte und eine aristotelische Logik der Intervalle *überhaupt wesentlich verschieden* sind. Wenn sie nicht trivial verschieden sind, sollte man zeigen, wo genau der Unterschied liegt.

Um die Punkt- und Intervallontologie formal vergleichen zu können, wird in dem, was folgt, eine aristotelische lineare Anordnung der Intervalle sowie die entsprechende Cantorsche Lehre über das lineare Punktkontinuum in der Logik *erster* Ordnung axiomatisch gefaßt. Zuvor wird der Unterschied zwischen den zwei Ontologien durch die zwei auf ihnen aufgebauten, rivalisierenden Konzeptionen der Bewegung, die *dynamische* und die *statische,* geschichtlich illustriert. Es soll aber dabei schon von Anfang an klar sein, daß das mögliche Ergebnis, nämlich daß es zwischen der Logik der Intervalle und der Logik der Punkte keinen nicht-trivialen Unterschied gibt, noch nicht implizieren würde, daß es keinen wesentlichen Unterschied zwischen den zwei Konzeptionen der *Bewegung* gäbe. Der Unterschied könnte nämlich auch durch die Einführung der *kinematischen Prädikate* verursacht werden.

## *1. Die Zenonsche Gabelung*

«Ζήνων δὲ παραλογίζεται· εἰ γὰρ αἰεί, φησίν, ἠρεμεῖ πᾶν ἢ κινεῖται ὅταν ᾖ κὰτα τὸ ἴσον, ἔστιν δ' αἰεὶ τὸ φερόμενον ἐν τῷ νῦν, ἀκίνητον τὴν φερομένην ἓιναι ὀϊστόν.»

Dies ist Aristoteles' Zusammenfassung der dritten Beweisreihe

Zenons gegen die Möglichkeit der Bewegung – des sogenannten *Fliegenden Pfeils* – so wie sie in *Bekkers* Ausgabe der *Physik* steht[10]. Die Textinterpreten und die späteren Herausgeber glauben aber, daß man in diesem Text etwas ändern müßte, um ein Enthymem zu erreichen, das dann zu einem sinnvollen Argument entwickelt werden könnte[11]. Ich dagegen halte keine Textänderung für geeignet, unter der Voraussetzung, daß die obige Zusammenfassung des Aristoteles *nur eine* von den zwei alternativen Beschreibungen der Bewegung behandelt, die im ursprünglichen Beweis Zenons widerlegt worden waren. Daß es sich bei der Widerlegung der Möglichkeit der Bewegung in diesem Beweis Zenons wirklich um eine *Alternative* handelte, sehen wir aus den bei Diogenes Laertius zitierten Worten Zenons[12]:

«Τὸ κινούμενον οὔτ' ἐν ὧι ἔστι τόπωι κινεῖται οὔτ' ἐν ὧι μὴ ἔστι,»
d. h. „Das Bewegte bewegt sich weder an dem Ort (in dem Raum), an dem (in dem) es sich befindet, noch an dem (in dem) es sich nicht befindet“[13].

Ich gehe davon aus, daß das „αἰεί … πᾶν … ὅταν ᾖ κὰτα τὸ ἴσον“ aus dem angegebenen Text des Aristoteles eine *allgemeine* Voraussetzung ist, die Zenon bei der Widerlegung der *beiden* alternativen Beschreibungen der Bewegung für gültig hielt: Ein Jedes ist immer sich selbst gleich[14], d. h. es nimmt immer den Raum ein, der ihm gleich ist, oder es ist immer genau dort, wo es ist, also an einem bestimmten Orte, sei es in Ruhe oder in Bewegung („ἠρεμεῖ … ἢ κινεῖται“).

Das „ἔστιν δ' αἰεὶ τὸ φερόμενον ἐν τῷ νῦν“ ist dagegen die *besondere* Voraussetzung der *ersten* Beschreibung der Bewegung, nach der das Fortbewegte immer nur als in dem *Jetzt* Existierendes betrachtet wird, wobei es zu verschiedenen Jetzt an verschiedenen Orten sein soll.

Freilich brauchen wir noch eine *dritte* Voraussetzung, die an der *angegebenen* Stelle bei Aristoteles verschwiegen wird, um die Schlußfolgerung, daß der Pfeil unter den obigen Voraussetzungen in der Tat immer unbewegt wäre, zu erreichen. Diese *ergänzende* Voraussetzung kann man an einer *anderen* Stelle bei Aristoteles finden, nämlich in der *Metaphysik*[15], wo Aristoteles über *Zenons Axiom* (τὸ Ζήνωνος ἀξίωμα) spricht, das Aristoteles selbst in der *Physik*[16] für unwiderlegbar hielt: *Keine* Größe kann aus *unteilbaren Bestandsstücken* aufgebaut werden. Dabei ist aus dem Kontext und aus dem von Aristoteles angegebenen Beispiel klar, daß unter den „unteilbaren Bestandsstücken“ hier *nicht* die *physikalisch undurchdringlichen* und *unzerstörbaren* Atome, sondern der *ausdehnungslose* Punkt (στιγμή), der *ausdehnungslose* Augenblick (νῦν), die in bezug auf die *Ausdehnungslosigkeit* in den entsprechenden Dimensionen unteilbare eindimensionale Linie (γραμμή) und unteilbare zweidimensionale Fläche (ἐπίπεδον) verstanden werden.

Die drei Voraussetzungen sind also:

(1) *Jedes existierende Objekt ist immer sich selbst gleich, d. h. es ist immer so groß wie es ist, oder es nimmt immer den Raum ein, der ihm gleich ist, also es ist immer genau dort, wo es ist, nämlich an einem bestimmten Orte, sei es in Ruhe oder in Bewegung.*
(2) *Jedes existierende Objekt – also auch ein eventuell fortbewegtes – existiert immer nur so, daß es in Augenblicken existiert.*
(3) *Kein in beliebiger Dimension Ausgedehntes besteht aus in dieser Dimension ausdehnungslosen Bestandsstücken.*

(1) und (2) stimmen offensichtlich miteinander überein. In jedem Moment nimmt jedes Objekt, sei es in verschiedenen Momenten an verschiedenen Orten oder nicht, den Raum ein, der ihm gleich ist.

(2) und (3) stimmten aber nicht miteinander überein, wenn es sich um das angeblich Fortbewegte handeln würde. Es kommt hier nicht darauf an (obwohl es laut (3) wahr wäre), daß die Zeit, in der das Bewegte sich bewegen sollte, nicht aus ausdehnungslosen Augenblicken besteht[17]. Es handelt sich darum, daß die verschiedenen Positionen des Bewegten, in denen es in verschiedenen Augenblicken sein sollte, laut (3) *nie* die Strecke, die es durchgehen sollte – sei sie so klein, wie man will – *ausfüllen könnten:* Während das angeblich Fortbewegte in einer Position wäre, erstreckte es sich bis zu einem ausdehnungslosen Punkt – z. B. *A* – und bevor es sich in einer anderen Position befände, in der es sich zu einem anderen ausdehnungslosen Punkt – z. B. *B* – erstreckte, könnte es nur in den Zwischenpositionen sein, in denen es sich zu gewissen ausdehnungslosen Punkten zwischen *A* und *B* erstreckte, die aber laut (3) die Strecke zwischen *A* und *B* nie ausfüllen könnten. Die Ortsänderung wäre also unmöglich, wenn das Objekt nur als in den Augenblicken existierendes zu betrachten wäre, oder – um die etwas seltsame Formulierung bei Diogenes zu erklären – wenn das Bewegte sich bewegen sollte, *indem* es nur an den Orten, an denen es sich in Augenblicken befindet, existiert.

Obwohl es über die *alternative* Beschreibung der Bewegung, die bei Diogenes genannt wird, bei Aristoteles nichts Direktes gibt, folgt unmittelbar aus der obigen Interpretation, wie sie lauten und wie sie widerlegt werden sollte.

Die Voraussetzung (1), als allgemeine, und (3), als Axiom, bleiben ungeändert, während (2), als besondere Voraussetzung, verändert wird in:

(2') *Jedes existierende Objekt – also auch ein eventuell fortbewegtes – existiert in der Zeit, die eine gewisse Dauer hat.*

Jetzt wären (1) und (2) nicht übereinstimmend, wenn es sich um das angeblich Fortbewegte handelte. Wäre ein Existierendes in Ruhe, nähme es in der Zeit, die eine gewisse Dauer hat, den Raum ein, der ihm gleich wäre, sollte es sich aber bewegen, müßte der Raum, in dem es in dieser Zeit wäre, *größer* als das Existierende selbst sein, und das wäre laut (1) unmöglich. Die Bewegung wäre also wieder unmöglich, weil das Objekt, um sich zu bewegen, an keinem bestimmten Ort wäre, oder – wenn wir wieder die Formulierung bei Diogenes zu erklären versuchen – es kann sich nicht so bewegen, daß es sich an keinem (d. h. keinem bestimmten) Ort befindet.

Die Schlußfolgerung, daß die Bewegung unmöglich ist, würde auch dann ungeändert bleiben, wenn die Gültigkeit von (2) und (2') so begrenzt wäre, daß man über die Existenz eines Objekts *sowohl* in Augenblicken *als auch* in der eine gewisse Dauer habenden Zeit *widerspruchsfrei* sprechen dürfte: Die Existenz in Augenblicken genügt laut (3) nie dafür, den Abstand zwischen zwei Zeitpunktpositionen zu annullieren, und die Existenz in der eine gewisse Dauer habenden Zeit macht wegen (1) keine Ortsänderung möglich.

## 2. *Dynamische Konzeption der Bewegung*

In bezug auf die Tatsache, daß, wenn es sich um das angeblich Fortbewegte handelt, die besondere Voraussetzung (2) in Übereinstimmung mit (1), nicht aber mit (3), während die besondere Voraussetzung (2') in Übereinstimmung mit (3), nicht aber mit (1) ist, könnte man erwarten, daß es geschichtlich zwei verschiedene Konzeptionen der Bewegung gibt, die eine, die (2), aber dann nicht (3), und die andere, die (2'), aber dann nicht (1), annimmt. Und es ist wirklich *genau so.* Das zeigt, wie bedeutend der Scheideweg ist, zu dem uns Zenon geführt hat – wenn man annimmt, daß die obige Interpretation des *Fliegenden Pfeils* geschichtlich korrekt ist.

Die Ablehnung von (1), die zur Konzeption der Bewegung führt, die ich *dynamische* Konzeption der Bewegung nenne, weil die Ortsänderung nach dieser Konzeption *nur* aufgrund der Existenz des *Zustandes der Bewegung* möglich sein sollte, wurde von Aristoteles angenommen: In der Zeit, in der es sich bewegt (ἐν ᾧ χρόνῳ κινεῖται), kann das Bewegte unmöglich im primären Sinne an der bestimmten Stelle sein (ἀδύνατον τότε κατά τι εἶναι πρῶτον τὸ κινούμενον)[18]. Das Bewegte würde sich also bewegen, *indem* es im *primären* Sinn an *keinem* bestimmten Orte sei.

Das Wichtigste an dieser Behauptung des Aristoteles ist die Tatsache, daß das Bewegte im *primären* Sinn[19] an keinem bestimmten Orte sei, was bedeutet, daß das *weder* äquivalent damit, *noch* die Konsequenz davon sein dürfte, daß das Bewegte zu verschiedenen Jetzt an verschiedenen Orten ist. Wäre es nicht so, könnte die Ortsänderung *auch* durch (1) und (2) gefaßt werden, was der Gültigkeit von (3) widerspräche. Die Tatsache, daß das Bewegte als Bewegtes nicht an dem bestimmten Orte sei, sollte also etwas *ontologisch Irreduzibles* und *sprachlich nicht Umformbares* sein. Es sei demzufolge so, daß das Bewegte nur dann, wenn es nicht *als Bewegtes* betrachtet wird, den Raum, der ihm gleich ist, einnimmt: Es würde dann in bezug auf die Relation *seiner Teile* betrachtet werden[20]. Das Bewegte als Bewegtes *existiere* notwendig in dem Raum, der *größer* als es selbst ist.

### *3. Statische Konzeption der Bewegung*

Wenn man die *Verneinung* der Voraussetzung (1) als Merkmal der *dynamischen Konzeption* und demzufolge die *Bejahung* von (1) als Merkmal der *statischen Konzeption* nimmt, ist die letztere schon in der Lehre Epikurs zu finden. Epikur hat aber die Voraussetzung (3) in der Form, in der sie bei Aristoteles als Zenons Axiom angegeben ist, nicht verneint, weil die *unteilbaren Bestandsstücke*, um die es sich in (3) handelt, von Epikur *nie* als *ausdehnungslose* Entitäten verstanden werden. Die räumlichen und zeitlichen Minima (ἐλάχιστα) hätten trotz ihrer *absoluten Teillosigkeit* eine *gewisse Größe* und würden aus sich selbst, als etwas an sich Primäres (ἐξ αὑτῶν πρώτων), die Maße (καταμέτρημα) jeder entsprechenden Größe erzeugen[21].

Um sich in der *ersten nächsten,* d.h. anschließenden, Position zu befinden, sollte das Objekt *nicht* im *Zustand der Bewegung* sein. Dies würde es erreichen, indem seine absolut minimalen Teilchen in zwei nacheinander unmittelbar folgenden minimalen Zeitteilchen je zwei unmittelbar nebeneinander liegende minimale Raumteilchen einnähmen. Es wäre also *wahr,* daß das Objekt sich immer nur an dem bestimmten Ort befindet, und daß es sich gleichzeitig an keinem Ort, an dem es sich nicht befindet, bewegt, genau wie es Zenon behauptet hat! Es wäre nur *nicht wahr,* daß demzufolge *keine Ortsänderung* möglich wäre, und daß das Objekt den Abstand zwischen verschiedenen Positionen nicht passieren könnte[22].

Der „einzige" Unterschied zwischen der Epikurschen statischen Theorie der Bewegung und der, die 1903 auf Basis der Kontinuumslehre von deutschen Mathematikern des 19. Jahrhunderts –Weierstraß, Dedekind und Cantor – in Russells *The Principles of Mathematics* formuliert wurde[23], liegt darin, daß man den teillosen Elementen selbst, aus denen die kontinuierlichen Größen bestünden, keine Größe zuzuschreiben bräuchte: Sie werden in bezug auf das Räumliche sowie auf das Zeitliche als „völlig ausdehnungslos und streng punktuell" betrachtet[24]. Das Axiom Zenons wurde hier also zum *ersten* Mal *in der Form,* in der es bei Aristoteles angegeben war, verneint.

Um eine kontinuierliche Größe, sei sie ein- oder mehrdimensional, aus ausdehnungslosen Punkten aufzubauen, braucht man, der Lehre Cantors nach, eine *überabzählbar unendliche Menge* von solchen Punkten, nämlich genau die der *zweiten Zahlenklasse,* d.h. der Gesamtheit der reellen Zahlen, deren Kardinalzahl durch $\aleph_1$ bezeichnet wird, und die Elemente dieser Punktmenge könnten dann so zusammengesetzt werden, daß sie eine *perfekt-zusammenhängende* Menge ausmachen, wobei die Prädikate „perfekt" und „zusammenhängend" die *notwendigen* und *hinreichenden* Merkmale eines Punktkontinuums sind[25].

Die *Logik der Punkte,* $S_P$, und die *Logik der Intervalle,* $S_I$, innerhalb deren die zwei Konzeptionen der physikalischen Welt und der Bewegung formal darzustellen sind, werden in den folgenden zwei Abschnitten axiomatisch gefaßt.

### 4. *Logik der Punkte: das System $S_P$*

Außer den Individuenvariablen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... , die mit $\forall$ und $\exists$ quantifiziert werden, enthält $S_p$ noch $\neg$, $\Rightarrow$ , $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$ und $\equiv$, $<$, wobei $\alpha \equiv \beta$ und $a < \beta$, sowie alle durch das Ersetzen von $\alpha$ oder $\beta$ durch andere Individuenvariablen oder durch die besonders eingeführten Individuenkonstanten entstandenen Formeln elementare Formeln sind.

Die Axiome von $S_P$ sind zunächst:

1. $(\alpha) \neg\, \alpha < \alpha$
2. $(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)\,(\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma)$
3. $(\alpha)\,(\beta)\,(\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha \equiv \beta)$
4. $(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)\,(\alpha \equiv \beta \wedge \alpha < \gamma \Rightarrow \beta < \gamma)$
5. $(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)\,(\alpha \equiv \beta \wedge \gamma < \alpha \Rightarrow \gamma < \beta)$
6. $(\alpha)\,(\exists\beta)\,\alpha < \beta$
7. $(\alpha)\,(\exists\beta)\,\beta < \alpha$
8. $(\alpha)\,(\beta)\,(\alpha < \beta \Rightarrow (\exists\gamma)\,(\alpha < \gamma \wedge \gamma < \beta))$.

Man kann $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... über die in bezug auf ihre lineare Ordnung ausdehnungslosen Elemente jeder unendlichen Menge laufen lassen, die isomorph zur Gesamtheit der rationalen oder reellen Zahlen ist, sei sie die Menge der Zeit- oder Raumpunkte oder die Menge irgendwelcher in wenigstens einer Dimension ausdehnungslosen Entitäten, wie die der Linien oder Flächen, weil die angegebenen acht Axiome genau diejenigen sind, durch die die lineare Ordnung der Elemente solcher unendlichen Mengen gefaßt ist, wobei „$\equiv$" als Identitäts- und „$<$" als Vorangehensrelation interpretiert sein sollen.

Daß durch diese acht Axiome, obwohl sie neben der Identitäts- nur noch die Vorangehensrelation enthalten, doch nur die *Zwischenbeziehung* der Elemente bestimmt wird, wobei die *Richtung*, in der die Elemente zusammengesetzt sind, irrelevant ist, folgt aus der Tatsache, daß mit Hilfe der Definition

$$\alpha > \beta \overset{df.}{\Leftrightarrow} \beta < \alpha$$

$>$ anstelle von $<$ in allen acht Axiomen eingesetzt werden kann[26].

Durch die Axiome 1–8 ist aber Zenons Axiom *noch nicht* verneint, weil die Gesamtheit der rationalen Zahlen, die *kein* Kontinuum ausmacht, *auch* die Grundmenge der Relationsstruktur, die das Modell für 1–8 wäre, sein könnte. Man braucht also noch ein neuntes Axiom, das *nur* in den *perfekten* und *zusammenhängenden* Mengen erfüllt ist. Dafür ist aber eine *schärfere* Logik nötig.

Obwohl das Kontinuumsaxiom normalerweise in der Logik zweiter Ordnung formuliert wird, formulieren wir es hier in der Logik *erster* Ordnung, so daß wir die Bildung der unendlichen Konjunktionen erlauben, weil es leichter sein wird, die zwei Systeme, um die es sich handelt, so zu vergleichen.

Die Formel

$$(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)\,(\beta < \alpha \wedge \alpha < \gamma \Rightarrow (\exists\delta_1)(\exists\delta_2)\ldots(\exists\delta_i)\ldots(\exists\varepsilon_1)(\exists\varepsilon_2)\ldots(\exists\varepsilon_j)\ldots$$
$$\ldots(\beta < \delta_1 \wedge \delta_1 < \delta_2 \wedge \ldots \wedge \delta_i < \delta_{i+1} \wedge \ldots \wedge \gamma > \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_j > \varepsilon_{j+1} \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge (\delta_i)\,(\varepsilon_j)\,(\delta_i < \alpha \wedge \alpha < \varepsilon_j))),$$

mit der das Cantorsche Prädikat „perfekt" vollinhaltlich gefaßt ist, ist mit dem Dichtheitsaxiom 8 äquivalent: Jedes Element jeder Grundmenge jeder Relationsstruktur, die ein Modell für das System der Axiome 1–8 ist, ist *„Häufungspunkt"* der Elemente der Grundmenge, weil in jeder *„Umgebung"* jedes Elements unendlich viele Elemente aus der Grundmenge liegen.

Das Dichtheitsaxiom 8 genügt aber *nicht* dafür, daß *jede* Häufung der unendlich vielen Elemente der Grundmenge den Häufungspunkt haben muß, der *selbst* ein Element der Grundmenge ist. So sind z. B. $\pi$ und $\sqrt{2}$ Häufungspunkte der Elemente aus der Menge aller rationalen Zahlen, die selbst *nicht* zur Menge aller rationalen Zahlen gehören, so daß man sagen kann, daß zwischen den Elementen der Gesamtheit der rationalen Zahlen „fremde" Elemente liegen – oder liegen können – und daß deshalb die Gesamtheit der rationalen Zahlen, für die das Dichtheitsaxiom *gilt*, noch *kein* Kontinuum ausmacht. Man braucht daher noch ein *neuntes* Axiom, mit dem das Cantorsche Prädikat „zusammenhängend" gefaßt wird, um zu sichern, daß $S_p$ nur in den Relationsstrukturen erfüllt wird, für deren Elemente auch gilt, daß *jeder* Häufungspunkt der unendlich vielen Elemente ein Element der*selben* Grundmenge ist. Ein solches Axiom ist das folgende:

9. $(\alpha)\,(\beta)\,(\alpha < \beta \Rightarrow ((\gamma_1)(\gamma_2)\ldots(\gamma_i)\ldots(\delta_1)(\delta_2)\ldots(\delta_j)\ldots(\alpha < \gamma_1 \wedge \gamma_1 < \gamma_2 \wedge\ldots$
$\ldots\wedge \gamma_i < \gamma_{i+1} \wedge\ldots\wedge \beta > \delta_1 \wedge \delta_1 > \delta_2 \wedge\ldots\wedge \delta_j > \delta_{j+1} \wedge\ldots\wedge (\gamma_i)(\delta_j)\,\gamma_i < \delta_j \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists\varepsilon)(\exists\zeta)(\gamma_i)(\delta_j)\gamma_i < \varepsilon \wedge \zeta < \delta_j \wedge (\varepsilon < \zeta \vee \varepsilon \equiv \zeta))))$.

Im Axiom 9 ist es die Existenzbehauptung über $\varepsilon$ und $\zeta$ – die immer zwischen zwei verschiedenen Mengen der sich zueinander nähernden

Elemente $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ und $\delta_1, \delta_2, \ldots$ zu finden sind[27], – die es unmöglich macht, daß solche Häufungen der unendlich vielen Elemente existieren, die ein „fremdes", zur Grundmenge nicht gehörendes Element – wie $\pi$ und $\sqrt{2}$ – als Häufungspunkt hätten.

Auch im Axiom 9 ist < durch > ersetzbar.

## 5. *Logik der Intervalle: das System $S_I$*

Außer den Individuenvariablen *a, b, c, ...,* die mit $\forall$ und $\exists$ quantifiziert werden, enthält $S_I$ noch $\neg$, $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$ und $=$, $<$, $\lessdot$, $\cap$, $\sqsubset$, wobei $a = b$, $a < b$, $a \lessdot b$, $a \cap b$, $a \sqsubset b$ sowie alle durch das Ersetzen von *a* oder *b* durch andere Individuenvariablen oder durch die besonders eingeführten Individuenkonstanten entstandenen Formeln elementare Formeln sind.

$\lessdot$, $\cap$ und $\sqsubset$ können alle über $=$ und $<$ folgendermaßen definiert werden:

$$a \lessdot b \leftrightarrow a < b \wedge \neg(\exists c)(a < c \wedge c < b),$$
$$a \cap b \leftrightarrow \neg a < b \wedge \neg b < a \wedge \neg a = b,$$
$$a \sqsubset b \leftrightarrow \neg a = b \wedge (c)(c \cap a \Rightarrow c \cap b).$$

Die Axiome von $S_I$ sind zunächst:

1. $(a)\neg a < a$
2. $(a)(b)(c)(d)(a < c \wedge b < d \Rightarrow a < d \vee b < c)$
3. $(a)(b)(a < b \Rightarrow a \lessdot b \vee (\exists c)(a \lessdot c \wedge c \lessdot b))$
4. $(a)(b)(c)(d)(a \lessdot c \wedge a \lessdot d \wedge b \lessdot c \Rightarrow b \lessdot d)$
5. $(a)(b)(c)(d)(a \lessdot b \wedge b \lessdot d \wedge a \lessdot c \wedge c \lessdot d \Rightarrow b = c)$
6. $(a)(\exists b)\ a < b$
7. $(a)(\exists b)\ b < a$
8. $(a)(\exists b)\ b \sqsubset a$

Man kann *a, b, c...* über die in bezug auf ihre lineare Ordnung ausgedehnten und durch andere Elemente begrenzten Elemente jeder unendlichen Menge laufen lassen, die isomorph zur Gesamtheit aller Intervalle zwischen allen rationalen oder allen reellen Zahlen ist, sei sie die Menge der Zeitintervalle oder der überhaupt wenigstens in einer Dimension ausgedehnten und begrenzten Entitäten, wie der Segmente der Linien, der begrenzten Flächen oder der dreidimensionalen, begrenzten Räume, weil durch die angegebenen acht Axiome von $S_I$ die lineare Ordnung der Elemente solcher Mengen gefaßt ist, wobei „$=$“ als Identitäts-, „$<$“ als Vorangehens-, „$\lessdot$“ als Anschließens-, „$\sqcap$“ als Überlappungs- und „$\sqsubset$“ als Einschließensrelation interpretiert werden soll[28].

Das Kontinuumsaxiom ist in $S_I$ ähnlich wie in $S_P$ einzuführen. Wegen des Axioms 8 von $S_I$ gilt für jedes Element jeder Grundmenge jeder Relationsstruktur, die das Modell für $S_I$ ist, daß in jeder „Umgebung“, d.h. innerhalb jedes unmittelbar vorangehenden oder unmittelbar nachkommenden Intervalls, unendlich viele sich aneinander anschließende Elemente aus der Grundmenge liegen. Es ist aber mit den angegebenen Axiomen von $S_I$ nicht gesichert, daß je zwei verschiedene Mengen der unendlich vielen, sich aneinander anschließenden Elemente aus der Grundmenge – wobei sich die Elemente einer der Mengen und die Elemente der anderen zueinander annähern – innerhalb von zwei sich aneinander anschließenden Elementen der Grundmenge *selbst* liegen müssen. So gibt es z.B. zwei Mengen der unendlich vielen, sich aneinander anschließenden Intervalle zwischen den rationalen Zahlen, die „links“ vom Intervall zwischen $\pi$ und 6, bzw. „rechts“ vom Intervall zwischen 0 und $\pi$ liegen, *ohne* daß die „linke“ und die „rechte“ Menge innerhalb von zwei sich aneinander anschließenden Intervallen zwischen den *rationalen* Zahlen liegen. Eine solche Möglichkeit wird erst durch das dem Kontinuumsaxiom aus $S_P$ entsprechende Axiom ausgeschlossen:

9. $(a_1)(a_2)\ldots(a_i)\ldots(b_1)(b_2)\ldots(b_j)\ldots(a_1 \lessdot a_2 \wedge a_2 \lessdot a_3 \wedge\ldots\wedge a_i \lessdot a_{i+1} \wedge\ldots$
$\ldots\wedge b_1 \gtrdot b_2 \wedge b_2 \gtrdot b_3 \wedge\ldots\wedge b_j \gtrdot b_{j+1} \wedge\ldots\wedge (a_i)(b_j)(a_i < b_j \wedge \neg a_i \lessdot b_j) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists c)(\exists d)(c \lessdot d \wedge (a_i)(b_j)(a_i < d \wedge c < b_j))),$

wobei

$$a < b \overset{df.}{\Leftrightarrow} b > a \text{ und } a \lessdot b \overset{df.}{\Leftrightarrow} b \gtrdot a$$[29].

Obwohl keines von *a, b, c,…* über die sogenannten offenen Intervalle läuft, kann man trotzdem auch in $S_I$ über sie sprechen. So bezeichnen z.B. die zwei unendlichen Konjunktionen aus dem Axiom 9 die „rechts“ bzw. „links“ offenen Intervalle.

Es ist leicht zu beweisen, daß – wie $<$ durch $>$ in $S_P$ – so auch $<$ und $\lessdot$ durch $>$ bzw. $\gtrdot$ in den Axiomen von $S_I$ ersetzbar sind.

## 6. *Die Trivialität des Unterschieds zwischen $S_P$ und $S_I$*

Da bisher die Logik der Intervalle nur sporadisch und nicht im gegebenen Zusammenhang skizziert wurde, hat man einen formalen Vergleich zwischen ihr und der Logik der Punkte nie durchgeführt.

Obwohl es sich bei $S_P$ und $S_I$ um zwei verschiedene Sprachen und demzufolge, nach der berühmten semantischen Formel Quines „Sein heißt Wert einer Variablen sein", um zwei verschiedene Ontologien handelt[30], ist es nicht ausgeschlossen, daß die zwei Systeme durch triviale Erweiterungen syntaktisch äquivalent werden könnten, und daß sie demzufolge auch ohne Erweiterungen nur trivial verschieden wären.

Wir vergleichen die zwei Systeme zuerst *semantisch*, mittels einer *verallgemeinerten* Definition der semantischen Äquivalenz, die den Isomorphismus der Grundmengen nicht verlangt, um dann aufgrund des Resultats dieses Vergleichs die entsprechenden Erweiterungen der Systeme einzuführen, die sie *syntaktisch* äquivalent machen.

*Definition 1.* Zwei axiomatische Systeme $S_1$ und $S_2$ sind dann und nur dann *semantisch äquivalent*, wenn es möglich ist, für jede Relationsstruktur $\langle X, \mathfrak{R}\rangle$, die das Modell für eines der Systeme ist – d.h. $\langle X, \mathfrak{R}\rangle \models S_1$ oder $\langle X, \mathfrak{R}\rangle \models S_2$ –, eine entsprechende Relationsstruktur $\langle X', \mathfrak{R}'\rangle$ nur aufgrund von $\langle X, \mathfrak{R}\rangle$ zu konstruieren, die das Modell für das andere ist – d.h. $\langle X', \mathfrak{R}'\rangle \models S_2$ bzw. $\langle X', \mathfrak{R}'\rangle \models S_1$.
*Metatheorem 1:* $S_P$ und $S_I$ sind semantisch äquivalent.

*Beweis*
*Teil 1*
Sei $\langle X_P, \mathfrak{R}_P\rangle$ Modell für $S_P$, d.h. $\langle X_P, \mathfrak{R}_P\rangle \models S_P$. Die Grundmenge für $S_I$ ist folgendermaßen zu konstruieren:

$$X' = \{\langle x_i, x_j\rangle \mid x_i \in X_P \wedge x_j \in X_P \wedge x_i < x_j\}.$$

Zwischen den Elementen von $X'$ gelten nun die auf die Relationen von $\mathfrak{R}_P$ zurückzuführenden Relationen $r'_1 \in \mathfrak{R}'$, $r'_2 \in \mathfrak{R}'$, $r'_3 \in \mathfrak{R}'$, $r'_4 \in \mathfrak{R}'$, $r'_5 \in \mathfrak{R}'$, so daß wenn „$=$" als $r'_1$, „$\prec$" als $r'_2$, „$\lessdot$" als $r'_3$, „$\dot{\cap}$" als $r'_4$, „$\dot{\sqsubset}$" als $r'_5$, interpretiert werden, dann $\langle X', \mathfrak{R}'\rangle \models S_1$.

Die Definitionen, die man dabei braucht, sind die folgenden:

$$\langle x_i, x_j\rangle = \langle x_k, x_l\rangle \overset{df.}{\Leftrightarrow} x_i \equiv x_k \wedge x_j \equiv x_l,$$

$$\langle x_i, x_j\rangle \prec \langle x_k, x_l\rangle \overset{df.}{\Leftrightarrow} x_j \equiv x_k \vee x_j < x_l,$$

$$\langle x_i, x_j\rangle \prec \langle x_k, x_l\rangle \overset{df.}{\Leftrightarrow} x_j \equiv x_k,$$

$$\langle x_i, x_j\rangle \sqcap \langle x_k, x_l\rangle \overset{df.}{\Leftrightarrow} (x_i < x_k \wedge x_k < x_j \wedge x_j < x_l) \vee (x_k < x_i \wedge x_i < x_l \wedge x_l < x_j),$$

$$\langle x_i, x_j\rangle \sqsubset \langle x_k, x_l\rangle \overset{df.}{\Leftrightarrow} (x_k < x_i \wedge \neg x_i < x_j) \vee (x_j < x_l \wedge \neg x_i < x_k).$$

Nun ist leicht zu beweisen, daß jedes Axiom von $S_I$ in $\langle X', \mathfrak{R}'\rangle$ erfüllt ist. So ist z.B.

$$(a) \neg a < a$$

erfüllt, weil das Gegenteil nur dann wahr wäre, wenn $x_i$, $x_j$, mit $x_i < x_j$, existieren, so daß

$$\langle x_i, x_j\rangle < \langle x_i, x_j\rangle,$$

d.h., laut Definition von $\langle x_i, x_j\rangle < \langle x_k, x_l\rangle$, nur wenn

$$x_i < x_j \wedge (x_j \equiv x_i \vee x_j < x_i)$$

gilt, was aber selbstwidersprechend ist.

*Teil 2*

Sei $\langle X_I, \mathfrak{R}_I\rangle$ Modell für $S_I$, d.h. $\langle X_I, \mathfrak{R}_I\rangle \models S_I$. Die Grundmenge für $S_P$ ist folgendermaßen zu konstruieren:

$$X'' = \{\langle M_i, M_j\rangle \mid M_i \subset X_I \wedge M_j \subset X_I \wedge (x_i)(x_j)(x_i \in M_i \wedge x_j \in M_i \Rightarrow x_i \prec x_j)\}.$$

Zwischen den Elementen von $X''$ gelten nun die auf die Relationen von $\mathfrak{R}_I$ zurückzuführenden Relationen $r''_1 \in \mathfrak{R}''$ und $r''_2 \in \mathfrak{R}''$, so daß wenn „≡" als $r''_1$ und „<" als $r''_2$ interpretiert werden, dann $\langle X'', \mathfrak{R}''\rangle \models S_P$. Die Definitionen, die man dabei braucht, sind die folgenden:

$$\langle M_i, M_j\rangle \equiv \langle M_k, M_l\rangle \overset{df.}{\Leftrightarrow} M_i = M_k,$$

$$\langle M_i, M_j\rangle < \langle M_k, M_l\rangle \overset{df.}{\Leftrightarrow} (x_i)(x_l)(x_i \in M_i \wedge x_l \in M_l \Rightarrow x_i < x_l \wedge \neg x_i \prec x_l).$$

Es ist leicht zu beweisen, daß jedes Axiom von $S_P$ in $\langle X'', \mathfrak{R}''\rangle$ erfüllt ist. So ist z.B.

$$(\alpha) \neg \alpha < \alpha$$

erfüllt, weil das Gegenteil nur dann wahr wäre, wenn $x_i$, $x_j$, mit $x_i \prec x_j$, existieren, so daß

$$\langle x_i, x_j\rangle < \langle x_i, x_j\rangle,$$

d. h., laut Definition von $\langle M_i, M_j\rangle < \langle M_k, M_l\rangle$, nur wenn

$$x_i \preccurlyeq x_j \wedge x_i \prec x_j \wedge \neg x_i \preccurlyeq x_j$$

gilt, was aber selbstwidersprechend ist.

*Schlußfolgerung aus den Beweisteilen 1 und 2:*
Da $\langle X', \mathfrak{R}'\rangle$ nur aufgrund von $\langle X_P, \mathfrak{R}_P\rangle$ sowie $\langle X'', \mathfrak{R}''\rangle$ nur aufgrund von $\langle X_I, \mathfrak{R}_I\rangle$ konstruiert ist, wobei $\langle X', \mathfrak{R}'\rangle \models S_I$ und $\langle X'', \mathfrak{R}''\rangle \models S_P$, sind $S_P$ und $S_I$ *semantisch äquivalent.*

Um die *Trivialität des syntaktischen Unterschieds* zwischen $S_I$ und $S_P$ formal ausdrücken und beweisen zu können, brauchen wir eine auch nicht-standarde, *verallgemeinerte Definition der syntaktischen Äquivalenz* der axiomatischen Systeme, die den Vergleich der Systeme, deren „Sprachen" verschieden sind, ermöglichen würde.

*Definition 2:* Die zwei (vollständigen) Systeme $S$ und $S'$, mit den gleichen elementaren Symbolen $s_1, s_2,\ldots,s_k, s^*_1, s^*_2,\ldots,s^*_l$, aus denen ihre Formeln auf gleiche Weise gebildet werden, wobei die Axiome von $S$: $A_1$, $A_2,\ldots, A_m$ nur $s_1, s_2,\ldots,s_k$ und die Axiome von $S'$: $A'_1, A'_2,\ldots,A'_n$ nur $s^*_1$, $s^*_2,\ldots,s^*_l$ enthalten, sind *syntaktisch äquivalent,* wenn die $s_1, s_2,\ldots,s_k$ enthaltenden Formeln aus den $s^*_1, s^*_2,\ldots,s^*_l$ enthaltenden Formeln und die $s^*_1, s^*_2,\ldots,s^*_l$ enthaltenden Formeln gleichzeitig aus den $s_1, s_2,\ldots,s_k$ enthaltenden Formeln mittels zweier Mengen von allgemeinen, aber nicht notwendig inversen Übersetzungsregeln zu bekommen sind, so daß alle Theoreme von $S'$ aus $A_1,A_2,\ldots,A_m$ und alle Theoreme von $S$ aus $A'_1,A'_2,\ldots,A'_n$ ableitbar sind.

*Definition 3 (was unter einem trivialen Unterschied in syntaktischer Hinsicht zu verstehen sei):* Wenn die zwei Systeme $S$ und $S'$, mit den gleichen elementaren Symbolen $s_1,s_2,\ldots,s_k, s^*_1, s^*_2,\ldots,s^*_l$, aus denen ihre Formeln auf gleiche Weise gebildet werden, wobei die Axiome von $S$: $A_1,A_2,\ldots,$ $A_m$ nur $s_1,s_2,\ldots,s_k$, die Axiome von $S'$: $A'_1,A'_2,\ldots,A'_n$ aber nur $s^*_1$, $s^*_2,\ldots,s^*_l$ enthalten, *syntaktisch äquivalent* sind, dann sind das System, das nur $s_1,s_2,\ldots,s_k$ und $A_1,A_2,\ldots,A_m$, und das System, das nur $s^*_1$, $s^*_2,\ldots,s^*_l$ und $A'_1, A'_2,\ldots,A'_n$ enthält, *syntaktisch trivial verschieden.*

*Metatheorem 2:* $S_P$ und $S_I$ sind syntaktisch trivial verschieden.

*Beweis*
Es ist leicht zu beweisen, daß das mit den Symbolen und Formeln von

$S_I$ erweiterte $S_P$ und das mit den Symbolen und Formeln von $S_P$ erweiterte $S_I$ syntaktisch äquivalent sind, wenn die folgenden Übersetzungsregeln stipuliert werden:

$$a = b : \alpha < \beta \wedge \gamma < \delta \wedge \alpha \equiv \gamma \wedge \beta \equiv \delta,$$
$$a \prec b : \alpha < \beta \wedge \gamma < \delta \wedge \neg\gamma < \beta,$$
$$\alpha \equiv \beta : a \preccurlyeq b \wedge c \preccurlyeq d \wedge a \preccurlyeq d,$$
$$\alpha < \beta : a \preccurlyeq b \wedge c \preccurlyeq d \wedge a \prec d \wedge \neg a \preccurlyeq d.$$

$S_P$ und $S_I$ sind deshalb – der Definition des syntaktisch trivialen Unterschieds zwischen den verschiedenen axiomatischen Systemen gemäß – *syntaktisch trivial verschieden.*

## 7. Schlußfolgerung

Da der Unterschied zwischen der Logik der Punkte und der Logik der Intervalle wenigstens ohne neu eingeführte Prädikate trivial ist, ist auch der Unterschied zwischen der Punkt- und Intervallontologie des *Raumes* und der *Zeit* trivial. Dieses Ergebnis könnte für die heutigen *Mathematiker überraschend* sein, weil diese Trivialität des Unterschieds bedeutet, daß die Logik der Intervalle grundsätzlich für sie gleich gut sein kann wie die bekannte und heute von der Mehrheit akzeptierte Logik der Punkte. Es könnte auch für die *Philosophen überraschend* sein, da die heute von der Mehrheit angenommene Punktontologie *in diesem Zusammenhang* von der alten Intervallontologie in der Tat nicht wesentlich verschieden ist.

Das Ergebnis bräuchte aber noch nicht für die *Physiker* und die streitenden *Ontologen* der *physikalischen* Welt *enttäuschend* zu sein. Die Trivialität des Unterschieds zwischen der Logik der Punkte und der Logik der Intervalle bedeutet nämlich noch nicht, daß der Streit zwischen den Punkt- und Intervallontologien in *einem anderen Zusammenhang,* wie in dem, der den Unterschied zwischen der *statischen* und der *dynamischen* Konzeption der Bewegung betrifft, auch gegenstandslos ist. Es ist auf jeden Fall gut möglich, daß $S_P$ und $S_I$ dann wesentlich verschieden werden, *wenn* sie durch die zu der Logik der Punkte, bzw. der Logik der Intervalle, *passenden physikalischen* oder *kinematischen* Prädikate erweitert sind. Die so erweiterten $S_P$ und $S_I$ zu vergleichen ist die nächste Aufgabe.

## *Literatur*

Aristoteles, *Metaphysik* (griechisch-deutsch), Übersetzung von Hermann Bonitz, neu bearbeitet, mit Einleitung und Kommentar hrsg. von Horst Seidl. Griechischer Text von Wilhelm Christ, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1978.

Aristoteles, „On Coming-to-Be and Passing-Away", *On Sophistical Refutations; On Coming-to-Be and Passing-Away* (griechisch-englisch), Harvard University Press and William Heinemann Ltd., Cambridge-Massachusetts and London, 1965 (zitiert als *De Generatione*).

Aristoteles [1831], Immanuelis Bekkeri *Opera,* Academia Borussica, Berolini, 1831.

Aristoteles [1988], *Physik* (griechisch-deutsch), übersetzt mit einer Einleitung und mit Anmerkungen hrsg. von Hans Günter Zekl, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1988.

Aristoteles, „Über unteilbare Linien", *Kleine Schriften zur Physik und Metaphysik,* herausgegeben/übertragen und in ihrer Entstehung erläutert von Dr. Paul Gohlke, Ferdinand Schöningh, Paderborn, 1957.

Aristoteles, „Topica", *Posterior Analytics; Topica* (griechisch-englisch), Harvard University Press and William Heinemann Ltd., Cambridge-Massachusetts and London, 1976.

Booth, N.B. [1957], „Were Zeno's Arguments Directed Against the Pythagoreans?", *Phronesis,* 1957.

Boyer, C.B. [1939], *The Concept of the Calculus: A Critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral,* Dover publications, New York and London, 1939.

Cantor, G. [1962], *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind, hrsg. von Ernst Zermelo, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962.

Carnap, R. [1928], *Der logische Aufbau der Welt,* Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1928.

Conford, F.M. [1950], *Plato and Parmenides,* Routledge and Kegan Paul Ltd., London, 1950.

Dedekind, R. [1892], *Stetigkeit und irrationale Zahlen,* zweite Auflage, Brunswick, 1892.

Diels, H., *Die Fragmente der Vorsokratiker,* griechisch und deutsch, hrsg. von Walther Kranz, erster Band, 18. Auflage, Weidmann, 1989 (zitiert als *DK*).

Epikur, „Epistula ad Herodotum", *The Extant Remains* (griechisch-englisch), with short critical apparatus, translation and notes by Cyril Bailey, Clarendon Press, Oxford, 1926.

Grünbaum, A. [1952], „A Consistent Conception of the Extended Linear Continuum as an Aggregate of Unextended Elements", *Philosophy of Science* 4, Band 19, 1952.

Hamblin, C.L. [1971], „Instants and Intervals", *Studium Generale* 24, 1971.

Heath, T.L. [1921], *A History of Greek Mathematics* I–II, Clarendon Press, Oxford, 1921.

Kant, I. [1786], *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft,* Riga, bey Friedrich Hartknoch, 1786.
Leibniz, G.W. [1960], „Theoria motus abstracti", *Die philosophischen Schriften,* hrsg. von C.J. Gerhardt, vierter Band, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1960.
Lewis, C.I. & Langford, C.H. [1959], *Symbolic Logic,* second ed., Dover publications, INC., New York, 1959.
Newton-Smith, W.H. [1980], *The Structure of Time,* Routledge and Kegan Paul, London, Boston and Henley, 1980.
Nicol, A.T. [1936], „Indivisible Lines", *Classical Quarterly* 30, 1936.
Owen, G.E.L. [1960], „Logic and Metaphysics in Some Earlier Works of Aristotle", in Düring J. and Owen, G.E.L., *Aristotle and Plato in the Mid-Fourth Century,* Elanders Boktryckerei Aktie bolag, Göteborg, 1960.
Quine, W.v.O. [1964], *From a Logical Point of View,* second ed., revised, Harvard University Press, Cambridge-Massachusetts, 1964.
Quine, W.v.O. [1970], *Philosophy of Logic,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1970.
Raven, J.E. [1948], *Pythagoreans and Eleatics,* Cambridge University Press, Cambridge, 1948.
Russell, B. [1903], *The Principles of Mathematics,* George Allen & Unwin Ltd., London, 1903.
Simplicius, „In Aristotelis physicorum commentaria", *Commentaria in Aristotelem Graeca* IX–X, typis et impensis Georgii Reimer, Berlin, 1882–95 (zitiert als *Physik*).
Tannery, P. [1885], „Le concept scientifique du continu – Zénon d' Elée et Georg Cantor", *Revue philosophique* 20, 1885.
Weiss, P. [1938], *Reality,* Princeton University Press, Princeton, 1938.

## *Anmerkungen*

* Dieser Text enthält einen Teil der erzielten Ergebnisse der durch die *Alexander von Humboldt-Stiftung* geförderten Forschung, die ich an der Universität Heidelberg durchführe. Außer der AvH-Stiftung bin ich Herrn Professor *Scheibe,* meinem wissenschaftlichen Gastgeber, für die langen, produktiven Diskussionen über das Thema besonders dankbar.

1 Viele Historiker glauben, daß die Punkte in der Lehre der früheren Pythagoreer nicht ausdehnungslose, sondern eine gewisse Größe habende Entitäten waren (*Cf.* Raven [1948], S. 72–74, Conford [1950], S. 58). Manche andere meinen dagegen, daß die Auffassung der Pythagoreer in dieser Hinsicht nicht eindeutig war (*Cf.* Tannery [1885], S. 388, Booth [1957], S. 99). Die mathematischen Entdeckungen, die den Pythagoreern zugeschrieben werden, sowie ihre Proportionslehre und die auf ihr beruhende Methode des Vergleichs verschiedener geometrischer Gebiete (*Cf.* Heath [1921], S. 150, Boyer [1939], S. 32) setzten auf keinen Fall eine bestimmte Konzep-

tion der elementaren geometrischen Entitäten voraus. Die Frage über die Dimension der elementaren geometrischen Entitäten wurde auf jeden Fall immer noch in der Platonschen Akademie diskutiert (*Cf.* Nicol [1936]).

2 *Cf.* Aristoteles, *Metaphysik*, 1001 b 7.

3 *Cf.* z.B. Simplicius, *Physik*, 139 5ff., 140 27ff., (*DK* 29 B 1–3).

4 *Cf.* Aristoteles, *Topica*, 141 b 21–23, *Metaphysik*, 1077 a 34–35.

5 Diese Intervallontologie ist bei Aristoteles eine Ontologie dessen, was in sich kontinuierlich (συνεχές) und gleichgeartet (ὁμοῖον) ist, wie z.B. des bloßen Raums und der Zeit, deren Teile als physikalisch nicht differenziert betrachtet werden (*Cf. Physik*, 227 a 10). Leibniz hat in demselben Zusammenhang die Lehre Descartes' über die *unbestimmten* Teile des Kontinuums als *Indefinitismus* bezeichnet (*Cf.* Leibniz [1960], S. 228).

6 Der Atomismus wurde schon ursprünglich als eine Lösung der Schwierigkeiten der Punkt- und Intervallontologie aufgestellt (*Cf.* Aristoteles, *De generatione*, 316 a 15–317 a 1).

7 Cantor [1962], S. 275.

8 Unter den einflußreichsten Darstellungen sind Russell [1903], Teil V und Grünbaum [1952] in bezug auf die gleichgearteten Kontinua, und Carnap [1928], IV B und Quine [1964], IV und [1970] S. 30ff., in bezug auf die nicht-gleichgearteten Gegenstände der Physik.

9 *Cf.* Hamblin [1971], Newton-Smith [1980], S. 136.

10 Aristoteles [1831], *Physik*, 239 b 5–7.

11 *Cf.* Aristoteles [1988], S. 90.

12 Die folgenden Worte gehören zu Diels' B-Fragmenten, sie sollten also angeblich authentische Worte Zenons sein (*Cf. DK* 29 B 4 9–10). Unabhängig davon, ob sie authentisch sind oder nicht, ist es kaum möglich, im ursprünglichen Beweis Zenons überhaupt *keine* alternativen Beschreibungen der Bewegung zu sehen. Die Deutung, die ich bieten werde, stimmt aber vielmehr genau mit den bei Diogenes angeführten Worten überein.

13 Übersetzung des Autors. Die Formulierung ist auf jeden Fall etwas seltsam, sei τόπος als „Raum" oder als „Ort" übersetzt. Ihre Bedeutung soll aus der folgenden Interpretation der Zusammenfassung des Aristoteles klar werden. In gewissen Zusammenhängen ist τόπος besser als „Raum", in gewissen anderen aber als „Ort" zu verstehen. So ist z.B. der für die Deutung des Zenonschen Arguments wichtige Übergang von der Tatsache, daß ein Objekt sich selbst gleich ist, zu der Tatsache, daß es einen *Raum* einnimmt, der ihm gleich ist, klarer als der Übergang zu der Tatsache, daß es an einem bestimmten *Ort* ist, obwohl die letztere auch folgen sollte.

14 „Ein Jedes" ist als „ein jeder fester Körper" zu verstehen.

15 Aristoteles, *Metaphysik*, 1001 b 7.

16 *Cf.* Aristoteles, *Physik*, 239 b 8–9.

17 Daß die Zeit auch nicht aus ausdehnungslosen Augenblicken besteht, betont Aristoteles in seinem Kommentar (*Physik*, 239 b 8–9), weil es für seine Lösung der Schwierigkeit innerhalb einer Intervallontologie wichtig ist. Für die Formulierung des Zenonschen Arguments ist es aber irrelevant, ob die Augenblicke ausdehnungslos sind oder sie, wie etwa bei Paul Weiss (*Cf.* Weiss [1938], VII), als zeitliche Minima, die gewisse Größe haben und

eine Zeitstrecke aufbauen *können*, verstanden werden. Es genügt, daß kein *räumlicher* Atomismus vorausgesetzt wird, und daß das Objekt in jedem Augenblick an einem bestimmten Ort sein soll.

18 Aristoteles, *Physik*, 239 a 24–26.

19 Dieser Punkt ist in der Übersetzung von Hans Günter Zekl verloren (*Cf.* Aristoteles [1988], S. 91). Was für eine zentrale Rolle die Lehre über die primären und sekundären Bedeutungen bei den Aristotelischen Lösungen verschiedener ontologischer (und nicht nur ontologischer) Probleme spielt, ist aber in dem klassischen Text von Owen bewiesen (*Cf.* Owen [1960]).

20 Im wesentlichen hat Aristoteles hier durch die Anwendung seiner Lehre über die primären und sekundären Bedeutungen den Unterschied zwischen dem Bezugssystem, innerhalb dessen ein Objekt sich bewegt, und dem Bezugssystem des Objekts selbst, in dem es in Ruhe ist, eingeführt, was dem Kantschen Unterschied zwischen dem absoluten und relativen Raum entspricht (*Cf.* Kant [1786], Erstes Hauptstück: Phoronomie).

21 Epikur, *Epistula ad Herodotum*, 58, 59. Die absoluten Minima seien vielmehr so groß, daß jede begrenzte Größe nur eine endliche Anzahl dieser Minima enthalten könne. Während das Objekt an einem bestimmten Orte sei, dehne es sich nicht bis zu einem Aristotelischen Punkt aus, sondern bis zu einem Ort, der trotz seiner Unteilbarkeit doch eine gewisse Größe habe. Das Ende des Objekts (ἄκρον) sollte also als ein Teil von ihm verstanden werden, der einen teillosen, aber doch eine gewisse Größe habenden Teil des Raums einnehme.

22 Diese Lehre Epikurs wird hier um der geschichtlichen Gerechtigkeit willen angegeben, weil sie bis zur zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die einzige statische Theorie der Bewegung war. Sie war aber nie unter den Mathematikern und Physikern populär. Eine solche Lehre ist nämlich mit der Standard-Geometrie nicht übereinstimmend, wie schon im Pseudo-Aristotelischen Text über die unteilbaren Linien gezeigt wurde (*Cf.* Aristoteles, *Über unteilbare Linien*, 970 a 27 ff. Obwohl dieses Werk wahrscheinlich gegen Xenokrates oder vielleicht gegen Platon gerichtet war, kann es ebensogut gegen Epikur benutzt werden.).

23 *Cf.* Russell [1903], Teil VII, S. 469 ff.

24 Cantor [1962], S. 275.

25 *Cf.* Cantor [1962], S. 194. Obwohl die Kontinuumslehre Cantors grundsätzlich mit jener Dedekinds übereinstimmt (*Cf.* Dedekind [1892]), sind die notwendigen und hinreichenden Merkmale eines Kontinuums sowie der Unterschied zwischen den beiden am klarsten bei Cantor angegeben, und für den hier beabsichtigten Vergleich der Logik der Punkte und der Logik der Intervalle sind am leichtesten diese Cantorschen Merkmale beim Aufbau der axiomatischen Systeme zu benutzen.

26 Man könnte also, wenn man die Irrelevanz der Richtung von Anfang an explizit darstellen wollte, ein System konstruieren, das anstatt der dyadischen Relation < die triadische Relation der Zwischenbeziehung enthielte (*Cf.* Lewis & Langford [1959], S. 372–388).

27 Die Annäherung ist nur deshalb eingeführt, um zu sichern, daß es sich

*überhaupt* um die konvergierenden Mengen handelt. Ob ε und ζ identisch oder nicht identisch sind, hängt aber von der *Art* der Annäherung ab.

28 Es ist möglich zu zeigen, daß alle diese Relationen zwischen den Intervallen, bzw. alle axiomatisch ausgedrückten Behauptungen, sich durch Textstellen bei Aristoteles belegen lassen (*Cf.*, zum Beispiel, in bezug auf die Unendlichkeitsaxiome 6 und 7 und das Dichtheitsaxiom 8 *Physik*, 233 a 17 ff.).

29 Es ist natürlich nicht möglich zu sagen, daß das Axiom 9 auch ein *Aristotelisches* Axiom ist, weil der Grund, der zu seiner Einführung führte, dem Aristoteles unbekannt war. Das bedeutet aber nicht, daß dieses Axiom ein *unaristotelisches* Axiom ist. Man könnte vielmehr kontrafaktisch behaupten, daß Aristoteles dieses Axiom angenommen hätte, wenn der Grund für seine Einführung ihm bekannt wäre. Es ist nämlich schwer zu glauben, daß er z.B. die Existenz der „fremden", d.h. der *nicht*-zeitlichen Intervalle innerhalb der Menge der *zeitlichen* Intervalle erlaubt hätte, was eine nicht-zusammenhängende Menge der Zeitintervalle implizieren würde.

30 Quine [1964], S. 15.