Philosophie der Zeit

Neue analytische Ansätze

Thomas Müller (Hg.)

KlostermannRoteReihe

Miloš Arsenijević

Die Bedeutung der Zenonischen Paradoxa für die Philosophie der Zeit

1 Einleitung

Die Unterschiede zwischen verschiedenen philosophisch-wissenschaftlichen Konzepten der Zeit und ihrer Natur lassen sich am besten und leichtesten begreifen, wenn man gegenüberstellt, welche Antworten sie auf Fragen nach Struktur, Topologie, Metrik, Richtung, Lauf und ontologischem Status der Zeit bereit halten.

1. Zur *Struktur* der Zeit: Ist die Zeit nur eine ewige, an sich ungeteilte und unteilbare Gegenwart (wie aus der Parmenidischen Ontologie folgt; DK 28 B 8 5–6), ein ungeteiltes, obzwar teilbares *compositum ideale* (wie Aristoteles (*Phys.* III 1, 200b12ff., III 6, 206a14ff., V 4, 228a24ff., *Met.* VII 9, 1034b32) und Kant (1781/87, A 438/B 466) meinten) oder ein echtes *compositum reale*? Sind die Elemente der Zeit, wenn letzteres der Fall ist, Zeitminima, die obwohl absolut unteilbar doch eine gewisse Dauer haben (wie bei Epikur, *Ep. Her.*, Fr. 58), die ausdehnungslosen, null-dimensionalen Augenblicke (wie bei Cantor (1962, S. 190, 275)) oder die Zeitstrecken, die immer kleinere und kleinere aktuelle Zeitstrecken in sich enthalten (wie heutige Neo-Aristoteliker[1] meinen)?

2. Zur *Topologie* der Zeit: Ist die Zeit in beiden Richtungen unbegrenzt (wie bei Aristoteles (*Phys.* VIII 1, 251b19) und Thomas von Aquin (*De aeternitate mundi*)) oder hat sie einen Anfang und bzw. oder ein Ende (wie gewisse platonistisch orientierte christliche Philosophen wie Augustinus (*Conf.* XI, 11f.) und einige zeitgenössische Kosmologen[2] glauben)? Ist die Zeit, sofern sie

1 Hamblin (1971), Needham (1981), Burgess (1982), White (1988), Venema (1990), Benthem (1995), Roeper (2006).

2 Cf. z.B. Rees (1969), Adams und Laughlin (1997).

überhaupt struktuiert ist, eine linear angeordnete Struktur (wie der klassischen Physik zufolge (Newton, 1972, I, S. 46ff.)) oder eine sich verzweigende Komponente des raum-zeitlichen Kontinuums (wie in der Relativitätstheorie (Einstein, 1911))? Oder ist die Zeit vielleicht eine geschlossene Struktur wie etwa ein Zirkel (etwas, das Eudemus (DK 58 B 34) einst für möglich gehalten hat und einige der heutigen Kosmologen[3] für wirklich halten)?

3. Zur *Metrik* der Zeit: Hat die Zeit eine intrinsische Metrik (wie bei Newton (1972, loc. cit.)) oder ist sie an sich metrisch amorph, so dass jede Metrik ihr nur von außen zukommen kann, sei sie mehr oder weniger konventionell einführbar (wie nach Duhem (1956, S. 439ff.), Poincaré (1913, S. 223ff.) und Reichenbach (1950, S. 116ff.)) oder durch die Struktur der Welt letztlich eindeutig determiniert (wie nach Grünbaum (1973, S. 106ff.))?

4. Zur *Richtung* der Zeit: Ist die mittels der „früher als"- bzw. „später als"-Anordnungsrelation bestimmbare Richtung der Zeit ontologisch prädeterminiert — sei es aufgrund der Natur der Zeit selbst (wie bei Newton (1953, S. 17)), sei es wegen irgendwelcher in der Welt geltenden Gesetze (etwa der thermodynamischen[4]) oder Relationen (etwa der Kausalitätsrelation[5]) —, oder können die „früher als"- und „später als"-Relation (ähnlich wie die die Punkte einer Gerade anordnende „links von"- und „rechts von"-Relation) ohne Definitionsänderung ihrer Bedeutung durcheinander systematisch ersetzt werden, so dass eine wahre Beschreibung der Welt nach wie vor ebensogut möglich bleibt (wie es nach Wheeler und Feynman (1949, S. 425) und Huw Price (1996, S. 159ff., 166ff.) sein sollte)?

5. Zum *Lauf* der Zeit: Ist der Unterschied zwischen der Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft etwas vom Zuschauer Unabhängiges und Objektives, das einen realen Unterschied in der Welt an sich ausmacht (wie es nach der tempusspezifischen Theorie der Zeit sein sollte[6]), oder sind alle tempusspezifischen Wahrheiten aufhebbar (wie nach der tempusfreien Theorie der Zeit), sei es so wegen der Zeichenreflexivität der tempusspezifischen Sätze (wie bei Russell (1906)), sei es wegen der Tatsache, dass die tempusspezifischen Sätze tempusfreie Wahrheitsbedingungen haben (wie bei Mellor (1998, 3.2)), oder aus irgendwelchen anderen Gründen? Nur in dem ersten Fall, in dem die *tempora* real sind, könnte man mit Recht, mindestens metaphorisch, über den Lauf der Zeit reden.

6. Zum *ontologischen Status* der Zeit: Ist die Zeit (wie auch der Raum) eine an sich existierende Entität, die auch dann existieren würde, wenn es keine existierende Welt gäbe (wie Isaac Barrow (1916, S. 35) und sein Schüler Isaac Newton (1953), S. 17ff.) meinten), oder ist sie etwas, dessen Existenz von den in der Welt stattfindenden Veränderungen abhängt (wie es nach Aristoteles (*Phys.* VIII 1, 251b19ff.) und Leibniz (1956, S. 25ff.) sein sollte)? Hängen, wenn letzteres der Fall ist, auch die Antworten auf die ersten fünf Fragen von der Struktur der Welt und den in ihr geschehenden Änderungen ab (wie die Physiker nach Leibniz immer öfter behaupten), und sind der Raum und die Zeit deshalb nur die Komponenten eines einheitlichen raum-zeitlichen Kontinuums (wie in der Relativitätstheorie; cf. Minkowski (1923))?

Worin besteht nun die Bedeutung der berühmten Zenonischen Argumente gegen die Vielheit und die Bewegung für die sechs genannten Fragen im Hinblick auf die Zeit?

Die authentischen Fragmente Zenons (DK 29 B 1–4) und die ersten drei kinematischen Aporien, die wir durch Aristoteles kennen (*Phys.* VI 2, 233a33ff., VI 9, 239b5ff., 239b11ff., 239b33ff., VIII 8, 263a6ff.), sind, historisch betrachtet, nicht nur die ersten, sondern auch die bedeutendsten Herausforderungen, mit denen die Möglichkeit, dass ein Kontinuum und somit auch die Zeit strukturiert ist, in Frage gestellt worden ist.

Nach Zenon könnte das Kontinuum weder aus ausdehnungslosen Entitäten bestehen, weil sie zu klein sind, um etwas Größeres ausmachen zu können (DK 29 B 2), noch aus ausgedehnten Entitäten, weil diese wegen ihrer Teilbarkeit keine echten Einheiten sind (DK 29 B 3) und weil dann auch ein begrenztes Ding aus unendlich vielen Teilen bestünde (DK 29 B 1). Im zweiten Fall wäre es auch unmöglich, ein gegebenes Ziel je zu erreichen, weil man unendlich viele Teile des Abstands passieren müsste, zum Beispiel seine erste Hälfte, dann sein nächstes Viertel, dann auch sein nächstes Achtel und so weiter ins Unendliche (Aristoteles, *Phys.* VI 9, 239b10–15). Achilles, der schnellste Läufer, könnte die sich sehr langsam bewegende Schildkröte auch nie

3 Kardashev (1990), Barrow und Dabrowski (1995).
4 Cf. Van Fraassen (1970), S. 86.
5 Mellor (1998), 10.2.
6 Cf. Arsenijević (2003b), S. 328ff.

erreichen, weil er zuerst dorthin kommen müsste, wo die Schildkröte am Anfang war, dann auch dorthin, wo sie zu der Zeit war, als er diese Stelle erreicht hatte, und so weiter ins Unendliche (*ibid.*, 239b15; Simplicius, *Comm.*, 1014. 23). Der angeblich fliegende Pfeil kann sich nicht so bewegen, dass er immer nur zu einem aus einer Reihe von Augenblicken ist (*ibid.*, 239b5–7), weil weder die Zeit aus Augenblicken noch ein Abstand aus Punkten besteht. Der Pfeil kann sich aber auch nicht so bewegen, dass er in einem Zeitintervall ist, weil er dann in einem Raum wäre, der größer als er selbst ist (cf. Arsenijević, Šćepanović und Massey (2007) III.4–5).

In erster Linie beziehen sich die Zenonischen Paradoxien also auf das Problem der Struktur der Zeit und des Raumes. Da aber schon Aristoteles diese Paradoxien aufzulösen versucht hat, indem er Zeit und Raum als *composita idealia* verstand, deren Teile nicht aktuell, sondern nur auf verschiedene Weise aktualisierbar seien (Aristoteles, *Phys.* III 6, 206a14ff.), betreffen sie auch den ontologischen Status von Zeit und Raum. Die aristotelische Unterscheidung zwischen den auf verschiedene Weise aktualisierbaren Teilen der Zeit und des Raumes einerseits und den aktuellen Teilen der physischen Welt sowie den Phasen der in ihr geschehenden Änderungen andererseits wirft nämlich die Frage auf, ob eine solche Verschiebung — von der Struktur der Zeit und des Raums, die an sich *homogene* Kontinua sein sollen, auf die so oder so aktuell strukturierte *heterogene* Welt — an dem ursprünglichen Problem so viel ändert, dass dadurch eine Lösung möglich wird, die vorher unmöglich war.

Neben den Fragen zur Struktur und zum ontologischen Status von Zeit und Raum betreffen die kinematischen Aporien Zenons auch ganz spezifisch die Zeit, dort nämlich, wo der Lauf der Zeit und damit ihre Richtung thematisiert werden. Zwar wird das Problem der Unendlichkeit der Phasen einer innerhalb einer begrenzten Zeit geschehenden Veränderung besonders schwierig, wenn es innerhalb der tempusspezifischen Theorie der Zeit formuliert ist. Aber das bedeutet nicht, dass die tempusfreie Theorie der Zeit damit automatisch einen Vorteil gewonnen hat. Denn schon gewisse überraschenderweise alte Varianten wie auch gewisse moderne Varianten der Zenonischen Herausforderung (Aristoteles, *Phys.* VI 2, 233a22, VIII 8, 263a8 und unten Abschn. 3.2), die intuitiv äußerst überzeugend aussehen, sind gerade gegen die intendierte tempusfreie Lösung gerichtet.

Was die Frage nach der Metrik angeht, ist bemerkenswert, dass die vierte kinematische Aporie direkt gegen die Möglichkeit einer einzigen und *a priori* gegebenen Metrik von Raum und Zeit gerichtet ist. Die

Länge einer und derselben Strecke, die ein und derselbe der drei sich bewegenden Körper passiert, wird verschieden ausfallen, wenn sie einmal in Bezug auf einen der zwei anderen Körper und dann in Bezug auf den anderen Körper gemessen wird (Aristoteles, *Phys.* VI 9, 239b33–240a18). Dasselbe gilt für die Länge der Zeit, in der eine und dieselbe Strecke passiert wird. Doch damit wird sich dieser Artikel nicht beschäftigen. Die Metrik ist aber freilich in einem der Beweise gegen die Vielheit sowie in den ersten beiden der vier kinematischen Aporien gewissermaßen schon im Spiel, weil die unendlich vielen Teile eines begrenzten Dinges, einer zurückgelegten Strecke und der Zeit, in der die Bewegung geschehen sein soll, der Bedingung der Konvergenz genügen müssen. Die Konvergenzbedingung ist nämlich nicht erfüllt, sofern nicht alle Teile oder mindestens die Teile einer unendlichen Teilmenge aller Teile ihrer Größe nach immer kleiner und kleiner werden.

Die einzige der sechs genannten Fragen im Hinblick auf die Zeit, die durch die Zenonischen Paradoxien anscheinend weder direkt noch indirekt betroffen ist, ist die nach der Topologie der Zeit. Denn in allen Paradoxien geht es um einen *begrenzten*, *nicht verzweigten* und *nicht geschlossenen* Teil des Archimedischen Raum- und Zeitkontinuums (cf. Arsenijević und Kapetanović (2007a)). Am Ende werden wir indes sehen, dass die sechs Fragen so sehr miteinander verflochten sind, dass die Zenonischen Paradoxien vielleicht auch für Fragen der Topologie relevant sind.

Im Folgenden stehen zwei Fragen im Brennpunkt:

1. Besteht das Zeitkontinuum an sich aus ausdehnungslosen Zeitpunkten oder aus Zeitstrecken, die eine gewisse Dauer haben?

2. Ist es im Prinzip möglich, dass unendlich viele physisch (d.h. nicht nur räumlich und/oder zeitlich) differenzierte Ereignisse innerhalb einer begrenzten Zeitstrecke geschehen?

Die anderen Fragen dagegen werden sich im Lauf der Untersuchung von selbst wieder bemerkbar machen.

2 Das Problem der Struktur des Raum- und Zeitkontinuums

2.1 Die Punktontologie

Gegen die Möglichkeit, dass ein Kontinuum aus ausdehnungslosen Elementen besteht, argumentiert Zenon folgendermaßen:

Denn würde es [etwas Ausdehnungsloses] einem anderen Seienden hinzugefügt, so würde es dieses um nichts vergrößern. Denn wird eine Größe, die nichts ist, einer anderen hinzugefügt, so kann diese an Größe nichts gewinnen. Und so wäre denn bereits hiernach der Zuwachs gleich nichts. Wenn ferner durch Abziehen einer Größe die andere um nichts kleiner und anderseits durch Hinzufügen nicht größer werden wird, so war offenbar das Hinzugefügte wie das Abgezogene gleich nichts. (DK 29 B 2 10–16)

Aristoteles hat Zenons Schlussfolgerung, die er „Zenons Axiom" nannte (*Met.* III 4, 1001b7), als unwiderlegbar *in einem gewissen Sinn* akzeptiert. Eine Linie besteht ebensowenig aus Punkten wie eine Zeitstrecke aus ausdehnungslosen Augenblicken besteht (Aristoteles, *Phys.* VI 9, 239b8). Denn für Aristoteles bestehen Entitäten höherer Dimensionen im Allgemeinen nicht aus Entitäten einer niedrigeren Dimension (*Met.* III 4, 1001b13ff.). Die vermeintliche Folgerung daraus aber, dass die ausdehnungslosen Punkte und Augenblicke deswegen bloß *nichts* seien, hat er nicht akzeptiert. Sie sind für ihn die *Grenzen* der zwei oder in der Tat der unendlich vielen Teilstrecken einer Raum- bzw. einer Zeitstrecke (*Phys.* VIII 8, 262a12ff.).

Ebenso hat Cantor „Zenons Axiom" *in einem gewissen Sinn* akzeptiert. Denn auch für Cantor ist es unmöglich, eine Strecke *Punkt für Punkt* aus Punkten aufzubauen (Cantor, 1962, S. 115ff.). Was er dagegen nicht akzeptiert hat, ist eine andere vermeintliche Folgerung aus „Zenons Axiom". Er hat nämlich bestritten, dass eine Strecke deshalb *überhaupt nicht* aus ausdehnungslosen Punkten bestehen könne, weil nach Cantor diese Punkte nicht notwendigerweise *einer nach dem anderen* zusammengefasst werden müssen. Eine linear geordnete Punktmenge mit überabzählbar vielen Elementen (deren Kardinalzahl also größer als $\aleph_0$ ist; *ibid.*, S. 123) kann *zuhauf* und *auf einmal* einer Strecke hinzugefügt werden. Sie werden die gegebene Strecke *kontinuierlich vergrößern*, wenn *zwei* Bedingungen erfüllt sind: Die hinzugefügte Punktmannigfaltigkeit muss *perfekt* und *zusammenhängend* sein (*ibid.*, S. 190). Sie ist perfekt, wenn jeder Punkt dieser Mannigfaltigkeit ein Häufungspunkt ihrer unendlich vielen Punkte ist; und sie ist zusammenhängend, wenn jede Häufung ihrer unendlich vielen Punkte auch ein Punkt der hinzugefügten Mannigfaltigkeit ist. Mit Recht hat Cantor diese Revision von „Zenons Axiom" für eine seiner größten Entdeckungen gehalten. Denn sie hat es ihm als erstem in der Geschichte ermöglicht, mit einer klaren Rechtfertigung zu behaupten, dass die Entitäten höherer Dimensionen doch aus den Entitäten einer niedrigeren Dimension bestehen können (*ibid.*, S. 275).

2.2 *Die Streckenontologie*

Wenn es, wie Zenon gemeint hat, nicht der Fall sein sollte, dass Entitäten höherer Dimensionen aus Entitäten niedrigerer Dimensionen bestehen, dann könnten Entitäten einer gewissen Dimension nur noch aus Entitäten derselben Dimension bestehen. So könnte vielleicht eine begrenzte Linie oder eine Zeitstrecke aus ihren ausgedehnten Segmenten bestehen. In diesem Fall wären diese Segmente aber ihrer Zahl nach unbegrenzt, weil jedes von ihnen wiederum kleinere Teile in sich enthält: „denn stets gibt es andere zwischen den anderen [von ihnen] und wieder andere zwischen jenen" (DK 28 B 3 3). Gegen diese Möglichkeit hat Zenon zweierlei eingewandt:

1. Es gäbe keine „echte Einheit" (*to kyrios hen*, Simplicius, *Comm.*, 97. 12–13), weil jede Strecke aus weiteren Teilstrecken bestünde. So gäbe es nur Vielheiten ohne echte Einheiten, was freilich absurd wäre, weil es keine Vielheit ohne echte Einheiten gibt: „Wenn Vieles ist, so müssen notwendig gerade soviele [Dinge] sein als wirklich sind, nicht mehr, nicht minder" (DK 28 B 3 1).

2. Etwas Begrenztes bestünde aus unendlich vielen Teilen und wäre deshalb seiner Größe nach unendlich (*apeiron*), was auch absurd ist (DK 28 B 3 5).

Ebenso wie „Zenons Axiom" hat Aristoteles auch den ersten Punkt dieses Arguments *in einem gewissen Sinn* durchaus akzeptiert. Keine Zeitstrecke und kein Raumgebiet ist ohne weiteres *weder eher eine Einheit noch eher eine Vielheit*. Ein Raumgebiet aber, das in sich *absolut homogen* ist, ist *wegen* dieser Homogenität *primär* (*proton*) eine Einheit, obwohl das morgen oder übermorgen anders sein kann.[7] *Dasselbe* Gebiet *könnte* morgen aus zwei heterogenen Gebieten bestehen, übermorgen aus drei, usw. Dann würde es *in erster Linie* eine Vielheit sein. Ähnlich ist eine Zeitstrecke, innerhalb derer in einem Raumgebiet nichts anderes als eine gleichförmige Bewegung geschieht, *in dieser Hinsicht* eine Einheit. Mit Bezug auf ein anderes Raumgebiet ist es aber gut möglich, dass sie *wegen* gewisser in ihr geschehender Änderungen aus mehreren Perioden besteht, so dass sie konsequenterweise, *bezogen auf dieses Gebiet*, primär eine Vielheit und nicht eine Einheit ist. So gibt es zwei zentrale Punkte bei Aristoteles. Der erste ist, dass man über eine Sache *auf mehrere Weise* reden kann (*pollachos an legoito*, cf.

7 Aristoteles, *Phys.* III 6, 206a14–25, Simplicius, *Comm.*, 138. 33ff.

z.B. Aristoteles, *Met.* IV 2, 1003a33, 1004a22). *Mit Bezug auf ein Raumgebiet* ist eine Zeitstrecke primär eine Einheit, während sie *mit Bezug auf ein anderes Raumgebiet* primär eine Vielheit ist. Der zweite Punkt betrifft den Unterschied zwischen dem, was *aktuell* (*energeia*; *ibid.*, VII 16, 1040b14), und dem, was potenziell (*dynamei*; *Phys.* III 6, 206a14ff.) existiert. *Aktuell* besteht jede Zeitstrecke und jedes Raumgebiet aus *so vielen Teilen*, wie *es gibt* — nicht mehr und nicht weniger. Das ist die Antwort auf das zweite Argument Zenons gegen die Möglichkeit, dass eine Zeitstrecke oder ein Raumgebiet eine Vielheit ist. Nur *potenziell* ist die Zahl der Teile *unbestimmt*, was aber nicht im Widerspruch dazu steht, dass sie aktuell sehr wohl bestimmt ist.

Einer der Begründer der modernen Logik, nämlich Frege, war mit der aristotelischen Antwort einverstanden (cf. Frege (1884), § 30), nur dass er und seine Nachfolger diese Antwort, da sie Cantorianer waren, nicht für eine Analyse der Struktur des Kontinuums, sondern nur für die Lösung des Problems der *Unbestimmtheit der Zahl der existierenden Dinge* ausgenutzt haben. Sie haben nämlich, ohne den Unterschied zwischen Aktualität und Potenzialität in Anspruch zu nehmen, die *pollachos legomena*-These auf die folgende Weise ergänzt: Zur Individuation der Dinge ist man immer auf den Gebrauch bestimmter *Substantive* (Sortalausdrücke) angewiesen (cf. Geach (1972), S. 238), und durch diese werden die *echten Einheiten eindeutig bestimmt*. Darum ist es nicht widersprüchlich, wenn man z.B. sagt, dieser Raum enthalte *k* Leute, *l* Moleküle, *m* Atome, *n* Elektronen usw. Wenn die *mehrdimensionalen* Einheiten von einer Individuation abhängen, die selbst von dem Gebrauch bestimmter Substantive abhängt, gibt es immer so viele *Dinge einer gegebenen Art*, wie es eben gibt — nicht mehr und nicht weniger.

In den letzten drei Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts hat aber die Zahl derjenigen Neo-Aristoteliker zugenommen, die eine keinerlei Unterschied zwischen Aktualität und Potenzialität beanspruchende *Streckenanalyse des Zeitkontinuums* begründet und verteidigt haben.[8] Das Zeitkontinuum sollte (wie bei Cantor) ein *compositum reale* sein; nur sollten seine Elemente nicht Punkte, sondern Zeitperioden sein. Um so etwas machen zu können, mussten sie *den Begriff des Elements* modifizieren. Eine der Konnotationen des Begriffs vom *Element eines Ganzen* bezieht sich nämlich auch auf die *Weise*, wie die Elemente das Ganze ausmachen. In der Sprachwissenschaft, der dieser Begriff entliehen ist, ist es aus *begrifflichen* Gründen nicht gestattet, dass ein Element die anderen Elemente des Ganzen enthält — und auf genau diesem Verbot

8 S. oben die Anmerkung 1.

beruht *inter alia* auch Zenons Argument gegen die *ausgedehnten* Konstituenten des Kontinuums. Gilt dieses Verbot jedoch absolut? Warum sollten wir nicht zulassen dürfen, dass zwar im Falle des Kontinuums, wenn auch nicht in den anderen Fällen, dessen Elemente andere solcher Elemente in sich enthalten? Und warum sollten dann die Elemente des Kontinuums nicht auch in *anderen* Relationen zueinander stehen dürfen?

Hebt man das genannte Verbot auf, so dürfen die Elemente, die in diesem Fall Zeitstrecken sind, nicht nur aneinander anschließen, sondern sie dürfen einander auch überlappen und ineinander eingeschlossen sein (cf. Arsenijević (1992), S. 170).

Es ist nun wichtig zu bemerken, dass post-cantorsche Aristoteliker bei der Formulierung ihrer Zeitanalyse gegenüber prä-cantorschen Aristotelikern einen Vorteil haben. Im Lichte der cantorschen Entdeckung sind Neo-Aristoteliker in der Lage, die zweite angegebene Bedingung („zusammenhängend zu sein") — die auch erfüllt sein muss, wenn eine Punktmannigfaltigkeit ein Kontinuum ausmachen soll — so zu reformulieren, dass man in Bezug auf eine Strecke nicht nur sagen kann, sie sei in *dem* Sinne kontinuierlich, dass sie durch gewisse Teilstrecken *ganz bedeckt* ist, sondern auch in *dem* Sinne, dass es keinen *Abstand* gibt, der durch keine der Teilstrecken *besetzt* ist (cf. Arsenijević und Kapetanović (2007a), S. 182).

2.3 Der Vergleich zwischen der Punkt- und Streckenontologie

Sowohl die cantorsche punktontologische als auch die neo-aristotelische streckenontologische Analyse des linearen archimedischen Kontinuums (und damit auch des *Zeit*kontinuums) lassen sich beide durch zwölf Axiome formalisieren (cf. *ibid.*, S. 181f.). Und, rein formal betrachtet, sind sie beide widerspruchsfrei. Aber welche von beiden ist wahr?

Üblicherweise vergleicht man zwei formale Theorien hinsichtlich ihrer Wahrheit dadurch miteinander, dass man Beispiele zu finden versucht, die entweder die eine oder die andere begünstigen. Es gibt aber auch einen kürzeren Weg, den ich schon ausprobiert habe:[9] In *gewissen* Fällen braucht man gar nicht erst nach Beispielen zu suchen, die entweder die eine oder die andere Theorie begünstigen, und zwar dann nicht, wenn es *a priori* möglich ist zu zeigen, dass es *keine* solchen Beispiele geben kann.

9 Arsenijević (1992), Arsenijević (2003), Arsenijević und Kapetanović (2007b).

Eine erste Idee davon, weshalb wir im Hinblick auf die beiden vorliegenden Theorien nicht erwarten sollten, dass es Beispiele geben könnte, die entweder die eine oder die andere begünstigen, liefert die Tatsache, dass *jede* Strecke durch ihre Endpunkte wie auch *jeder* Punkt durch zwei aneinander anschließende Strecken *eindeutig bestimmbar* ist. Können wir dann nicht jede der beiden formalen Theorien verwenden, um *alle* in der jeweils anderen Theorie formulierbaren Aussagen so auszudrücken, dass *jede* Behauptung, die in einer von ihnen wahr ist, auch in der anderen wahr bleibt?

Rein formale Betrachtungen sollen uns in diesem Artikel nicht beschäftigen. Ich habe bereits gezeigt (cf. Arsenijević (2003a), S. 8ff.; Arsenijević und Kapetanović (2007a), S. 183), dass zwei Reihen von (nichtinversen) Übersetzungsregeln aufgestellt werden können, vermittels derer jede Aussage einer der beiden Theorien in genau eine Aussage der anderen so übersetzbar ist, dass stets nur Theoreme bzw. Wahrheiten der einen in Theoreme bzw. Wahrheiten der anderen übersetzt werden. Diese Situation verlangt eine allgemeine semantisch-ontologische Deutung. Bevor wir uns dieser widmen können, sei jedoch erst eine Frage beantwortet, die einem an dieser Stelle in den Sinn kommen mag und die eine Antwort verlangt.

Da die *Intervalle* in der Punktontologie aus Punkten bestehen, gibt es in dieser Ontologie einen klaren Unterschied zwischen *offenen, abgeschlossenen* und *halboffenen* (*halbabgeschlossenen*) Intervallen. Die *Strecken* dagegen, die in der Streckenontologie als Elemente fungieren, sind weder offen noch abgeschlossen oder halbabgeschlossen. Heißt das nun nicht, dass es einen klaren ontologischen Unterschied zwischen den beiden Theorien gibt? Zwei Tatsachen machen einen solchen Unterschied zunichte.

Der Tatsache, dass Strecken an sich weder offen noch abgeschlossen oder halbabgeschlossen sind, entspricht in der Punktontologie die Tatsache, dass ein abgeschlossenes Intervall mit demjenigen Intervall, das durch den Abzug eines seiner Endpunkte entstünde, *metrisch identisch* wäre. In *diesem metrischen* Sinne sind auch die entsprechenden offenen, abgeschlossenen und halbabgeschlossenen Intervalle in der Punktontologie ununterscheidbar (cf. Arsenijević und Kapetanović (2007b), § 3). Zugleich *gibt es* in der Streckenontologie etwas, das dem offenen, und etwas, das dem halboffenen Intervall der Punktontologie entspricht; *im Hinblick darauf* entsprechen die *Strecken* den *abgeschlossenen* Intervallen der Punktontologie: Eine unendliche Menge von aneinander anschließenden oder einander überlappenden Strecken, die eine obere Grenze besitzt, hat auch (nach einem Theorem der streckenontologischen Theorie (*ibid.*, § 2)) eine *unterste obere Grenze*. Infolgedessen entspricht eine solche *Streckenmenge*, obwohl sie selbst keine Strecke ist, einem *rechts offenen Intervall* der Punktontologie. *Mutatis mutandis* entspricht eine unendliche Menge von aneinander anschließenden oder einander überlappenden Strecken, die eine untere und mithin auch eine *oberste untere Grenze* besitzt, einem *links offenen Intervall* der Punktontologie.

Und jetzt zur zentralen Frage! Sind die Punkt- und die Streckenontologie identisch oder nicht? Da die Variablen einer der beiden Theorien, in denen die beiden Ontologien formal erfasst sind, in keinem Modell der jeweils anderen über den Elementen derselben Grundmenge rangieren, sollten wir — nach Quines berühmtem Slogan ("*to be accepted as an entity* [...] *is to be reckoned as the value of a variable*"; Quine (1961), S. 13) — wohl sagen, dass die beiden Ontologien *nicht* identisch sind. Zugleich aber bleiben nach den Übersetzungsregeln *alle* Wahrheiten, die *in einer* der beiden Theorien ausdrückbar sind, auch *in der anderen* Wahrheiten, während *alle* Unwahrheiten hüben auch drüben Unwahrheiten bleiben. Welcher dieser beiden Gründen ist gewichtiger? Die natürlichste Lösung ist, die beiden formalen Theorien für *syntaktisch und semantisch* nur *trivial verschieden* zu halten (cf. Arsenijević (2003a), wo ein verallgemeinerter Begriff der trivialen Differenz der zwei Theorien formal eingeführt wird), so dass man nur noch sagen kann, „der große Streit" zwischen Cantorianern und Neo-Aristotelikern sei *„much ado about nothing"* (Arsenijević und Kapetanović (2007b)).

2.4 *Der Fliegende Pfeil Zenons: Ein Fall für den „großen Streit"*

Nach Diogenes Laertius (ähnlich wie nach Epiphanius) hat Zenon gesagt: „Das Bewegte bewegt sich weder in dem Raume, in dem es ist, noch in dem es nicht ist" (DK 29 B 4). Diese etwas seltsame Formulierung lässt sich erklären, sobald man berücksichtigt, was Aristoteles in der *Physik* über den *Fliegenden Pfeil* Zenons sagt (cf. Arsenijević, Šćepanović und Massey (2007)).

Die Schlussfolgerung des *Fliegenden Pfeils* besteht nach Aristoteles' Darstellung darin, dass der Pfeil sich nicht bewegen kann, wenn er immer in einem Augenblick ist (Aristoteles, *Phys.* VI 9, 293b5ff.). Aus dem Kontext, in dem Aristoteles dies verhandelt, ist klar, dass das Gesagte nicht bedeutet, dass der Pfeil sich nicht bewegt, wenn er immer in *einem und demselben* Augenblick ist (was trivial wäre), sondern dass er sich nicht so bewegen kann, dass er *nach und nach immer nur in* *einem der Reihe von Augenblicken* ist. *Prima facie* könnte er sich auf diese Weise bewegen, nämlich so, dass er sich in den *verschiedenen* Augenblicken an *verschiedenen* Orten befindet. Das wäre aber nur dann möglich, wenn die Zeit, in der eine Strecke durchlaufen sein sollte, wie auch die durchlaufende Strecke selbst aus ausdehnungslosen Entitäten bestünde, was aber durch „Zenons Axiom" ausgeschlossen wird. Die Behauptung in DK 29 B 4, dass „das Bewegte sich nicht in dem Raume bewegt, in dem es ist", bedeutet also nichts anderes, als dass es sich nicht bewegen kann, wenn es immer nur genau dort ist, wo es ist.

Die Alternative wäre, dass der fliegende Pfeil nicht nur in den Augenblicken, sondern auch in den ausgedehnten Zeitstrecken ist. In einer Zeit*strecke* aber wäre er im buchstäblichen Sinne in etwas, das ihm nicht gleich (*kata to ison*; Aristoteles, *Phys.* VI 8, 239a25) ist. Anders gesagt: Er wäre in einem Raume, dem er nicht gleich ist. Das ist aber ebenso gut unmöglich, weil jedes Ding so groß ist, wie es ist — weder größer noch kleiner. Die Behauptung in DK 29 B 4, dass „das Bewegte sich nicht in dem Raum bewegt, in dem es nicht ist", bedeutet nun, dass es sich nicht so bewegen kann, dass es sich in den ausgedehnten Zeitstrecken befindet (cf. DK 29 B 4 und Aristoteles, *Phys.* VI 9, 239b6).

Aristoteles hat das Paradoxon mittels seines *pollachos legomena*-Prinzips gelöst. Ein Objekt ist gegenüber etwas, das ihm gleich ist (*kata to ison*), nur wenn es in Ruhe ist. Wenn es sich aber bewegt, ist es in keiner bestimmten Position, sondern gegenüber etwas, das ihm *nicht* gleich ist (Aristoteles, *Phys.* VI 8, 239a23ff.). Das Bewegte *ist kata to ison*, obwohl nicht im *primären Sinne* (*proton*), nur in Bezug auf etwas, das sich parallel zu ihm bewegt und ihm gleich ist, weil das Bewegte in Bezug auf so etwas eigentlich in Ruhe ist. Aristoteles hat also das Problem durch die *Spezifizierung* der *kata to ison*-Bedingung gelöst, die in *verschiedenen* Hinsichten zugleich erfüllt und nicht erfüllt sein *kann*.

Im Gegensatz zu Aristoteles hat Russell das Paradox innerhalb der cantorschen Punktontologie gelöst (Russell (1903), S. 469ff.). Da die Zeit wie auch die zu durchlaufende Raumstrecke aus ausdehnungslosen Augenblicken bzw. Punkten besteht, bewegt sich das Bewegte einfach so, dass es *in verschiedenen Augenblicken an verschiedenen Positionen* ist.

Im Lichte unserer Lösung des „großen Streits" zwischen der Punkt- und Streckenontologie sind die zwei Lösungen nicht nur *verträglich*, sondern eine jede kann auf die andere *zurückgeführt* werden. Einerseits werden alle „unbestimmten" Positionen des Bewegten, wenn es nicht *kata to ison*, ist, durch die 1 : 1-Korrespondenz zwischen den entsprechenden Zeit- und den zu durchlaufenden Raumstrecken in der Streckenontologie bzw. durch die 1 : 1-Korrespondenz zwischen den entsprechenden Zeit- und den zu durchlaufenden Raumintervallen in der Punktontologie genau so gut bestimmt, wie die wesentliche Unbestimmtheit der Positionen eines Bewegten das erlaubt. Anderseits werden die „bestimmten" End- wie auch alle Zwischenpositionen, in denen das Bewegte während der Bewegung *kata to ison* ist, durch die 1 : 1-Korrespondenz zwischen den entsprechenden Äquivalenzklassen der aneinander anschließenden Zeit- und Raumstrecken in der Streckenontologie bzw. durch die 1 : 1-Korrespondenz zwischen den entsprechenden Zeit- und Raumpunkten in der Punktontologie absolut genau bestimmt.

In der Streckenontologie ist die *Unbestimmtheit* der Positionen etwas Wesentliches, weil das Bewegte sich so bewegt, dass es *im Zustand der Bewegung* ist. Die absolut bestimmten Positionen sind erst die *Folgen* einer gegebenen Bewegung des Bewegten. Aus diesem Grund heißt diese Konzeption die *dynamische* Theorie der Bewegung. In der Punktontologie ist das Bewegte *grundsätzlich nie im Zustand der Bewegung*, weil es im Grunde genommen immer in einer *bestimmten* Position ist. Ein Zustand der Bewegung ist erst eine Folge des *In-bestimmten-Positionen-Seins* eines sich grundsätzlich nicht bewegenden Bewegten. Aus diesem Grund heißt diese Konzeption die *statische* Theorie der Bewegung. Die *triviale Differenz* der beiden Theorien beruht darauf, dass das Wesentliche jeder der beiden Theorien in der anderen definierbar ist.

Nun kann man bemerken, dass die dynamische Theorie doch einen klaren Vorteil hat, der darin besteht, dass kein Objekt seinen Ort so ändern könnte, dass es in jeder absolut bestimmten Position eine gewisse Zeit in Ruhe wäre, und zwar auch dann nicht, wenn es immer in der späteren der beiden beliebigen Augenblicke kürzer wäre, so dass die *ganze* Zeit begrenzt wäre, die es für die Ortsveränderung brauchte. Die *dynamische* Theorie bietet nämlich eine aus ihr unmittelbar folgende Erklärung der angegebenen Unmöglichkeit. Da *Sich-zu-bewegen* soviel bedeutet wie *Im-Zustand-der-Bewegung-sein*, ist keine Ortsveränderung ohne den Zustand der Bewegung möglich, und in einem Zustand der Bewegung zu sein verlangt, in einer *Zeitstrecke* zu sein. Auch wenn alle Zwischenaugenblicke, Zwischenpunkte und bestimmte Zwischenpositionen eines Bewegten *definierbar* sind, so sind sie von der *Existenz* der Grundelemente der Streckenontologie und mithin auch von der *Existenz* eines *Zustands der Bewegung* abhängig. Da es in dem angegebenen Beispiel *keinen* Zustand der Bewegung gibt, ist in diesem Fall eine Ortsveränderung *begrifflich ausgeschlossen*. Was für eine Erklärung der Unmöglichkeit der angegebenen Weise der Ortsveränderung könnte aber die *statische* Theorie geben, in der die Ortsveränderung vom Zustand der Bewegung *nicht* abhängt, weil ja der Zustand der Bewegung nur ein *Epiphänomen* des *In-bestimmten-Positionen-Seins* ist?

Die Antwort hat unmittelbar damit zu tun, auf welche Weise „*Zenons Axiom*" in der Punktontologie negiert wird. Es wird darin nämlich zwar verneint, dass Entitäten höherer Dimensionen nicht aus Entitäten niedrigerer Dimensionen bestehen können, es wird aber *nicht* verneint, dass kein lineares Kontinuum *Punkt für Punkt* oder *Augenblick für Augenblick* aufgebaut werden kann. Die Elemente eines linearen Kontinuums sind in dem Sinne *geordnet*, dass für je zwei von ihnen wahr ist, dass sie entweder identisch sind oder eines von ihnen dem anderen vorangeht. Sie sind aber *nicht wohlgeordnet*, weil *keines* einen *unmittelbaren Nachfolger* hat. Folglich ist es unmöglich, den Ort zu wechseln, ohne *unendlich viele* Zwischenpositionen hinter sich zu lassen. Den Ort so zu wechseln, dass man in jeder der Zwischenpositionen eine Weile bleibt, wird also *durch die Art und Weise*, auf die das Kontinuum strukturiert ist, als unmöglich ausgeschlossen.

So haben die beiden Theorien ihre je eigene Erklärung für den problematischen Fall. Bezüglich der Frage des eventuellen Vorteils der dynamischen Theorie könnte man bestenfalls sagen, dass die statische Theorie der dynamischen Theorie *nolens volens* darin eine *Konzession* machen muss, dass, auch wenn der *Zustand der Bewegung* etwas *Epiphänomenales* ist, keine Ortsveränderung *ohne* einen Zustand der Bewegung möglich ist, und sei es so nur wegen der Weise, auf die die Elemente des linearen Kontinuums angeordnet sind. Auf diesen Punkt werden wir im Folgenden in Abschn. 3.2 unten noch einmal zurückkommen.

3 Das Problem des in sich unendlich differenzierten aber begrenzten Kontinuums

3.1 Die räumliche Variante des Problems

Oben (in Abschn. 2.2) haben wir gesehen, wie Aristoteles das Zenonische Problem der Unbestimmtheit der Einheit bzw. der Anzahl der Konstituenten der Vielheit mittels seines *pollachos legomena*-Prinzips und des *dynamei-energeia*-Unterschieds gelöst hat, während die moderne Logiker dasselbe nur mittels der Berufung auf das *principium individuationis* geleistet haben. Bezüglich der Frage der eventuellen *Unendlichkeit* der innerhalb eines Gebiets existierenden Dinge wurde aber bis jetzt noch gar nichts gesagt.

Wir haben zwar bemerkt, dass es, wenn *Dinge* gut individuiert sind, so viele Dinge einer *gegebenen Art* gibt, wie es eben gibt — weder mehr noch minder —, aber es ist unklar geblieben, ob ihre Anzahl nicht vielleicht auch *unendlich* sein könnte. Obwohl nämlich klar ist, dass es innerhalb eines begrenzten Raums für unendlich viele Leute, Moleküle, Atome, Elektronen oder andere in der Physik bekannten Entitäten *nicht genug Platz gibt*, bleibt doch unklar, ob dasselbe für physikalische Wesen *jeder Art* gelten muss. Könnte es nicht Wesen einer gewisser Art geben, die *beliebig klein* sein können, so dass für unendlich viele von ihnen auch innerhalb eines begrenzten Raums genug Platz wäre, weil sie immer kleiner und kleiner sein könnten (cf. Arsenijević (1989))?

Aristoteles hat geglaubt, dass so etwas *unmöglich* ist (*Phys.* III 6, 206b7–10), aber es ist nicht klar genug, warum er das gemeint hat.

Es scheint gut möglich zu sein, dass Zenon selbst davon ausgegangen ist, die Unendlichkeit der Elemente einer echten Vielheit sei schon aus *sprachlich-begrifflichen* Gründen ausgeschlossen. Man kann nämlich „*apeiron*" ebenso gut mit „unbestimmt" wie mit „unbegrenzt" übersetzen. Aber auch unabhängig von der Übersetzung kann es aussehen, als könne man über die *bestimmte* Anzahl der Elemente, die also weder kleiner noch größer ist, nur reden, wenn diese Anzahl *fixiert* und damit auch *endlich* ist. Eine solche Argumentation ist aber bei Aristoteles aus zwei miteinander zusammenhängenden Gründen nicht zu erwarten.

Erstens hat er — wie wir anlässlich seiner Begrenzung der Gültigkeit von „Zenons Axiom" bereits gesehen haben — die Schlussfolgerung aufgrund seines *pollachos legomena*-Prinzips bestritten. Punkte seien *nichts*, weil sie keine Elemente des Kontinuums sein könnten. Punkte *sind*, obwohl sie *keine* konstituierenden Elemente des Kontinuums sind, *dennoch etwas*, weil sie die *Grenzen* der Segmente sind. Warum sollte es dann aufgrund desselben (*pollachos legomena*) Prinzips nicht auch möglich sein, dass die Anzahl einer Vielheit gleichzeitig *bestimmt* und *unendlich* ist, *bestimmt* in dem Sinne, dass es genau so viele Elemente gibt, wie es eben gibt, und *unendlich* in dem Sinne, dass ihre Anzahl größer ist als jede endliche Zahl?

Der zweite Grund, aus dem zu erwarten ist, dass Aristoteles die *unendliche Anzahl* der aktuellen Teile *zumindest im Prinzip erlauben* konnte, besteht in seiner *klaren begrifflichen* Unterscheidung zwischen *aktueller* und *potenzieller* Unendlichkeit, wobei die *aktuelle Unendlichkeit* keine *contradictio in adiecto* ist (*ibid.*, III 6, 206b24).

Wenn Aristoteles also, wie es ja tatsächlich der Fall ist, geleugnet hat, dass ein *unendliches, aber begrenztes compositum reale* möglich ist, dann muss er dafür *andere* als bloß *sprachlich-begriffliche* Gründe vor

Augen gehabt haben. Vermutlich sind diese Gründe genau jene, die sich aus den ersten beiden *kinematischen* Aporien Zenons ergeben und auf die Aristoteles keine andere als die *finitistische* Antwort geben konnte (wie wir bald sehen werden). Wenn es so ist, dürfte man sagen, dass Aristoteles eine *uniforme Lösung* für die *räumliche* wie auch für die *kinematische* bzw. *zeitliche* Variante des Problems darbieten wollte.

Cantorianer wie auch post-cantorsche Aristoteliker, die von Anfang an kein Problem mit *unendlichen Zahlen* hatten, haben zwar auch eine *uniforme*, aber eine auf den Begriff der *aktuellen Unendlichkeit* gegründete *infinitistische* Lösung sowohl der *räumlichen* als auch der *kinematischen* bzw. *zeitlichen* Variante des Problems angeboten.[10] Ihnen zufolge kann es ebenso gut innerhalb eines begrenzten Raums unendlich viele gut-differenzierten Gebiete geben wie unendlich viele wohldifferenzierten Ereignisse innerhalb einer begrenzten Zeitstrecke geschehen können.

Da die *kinematische* bzw. *zeitliche* Variante des Problems im Zentrum dieses der *Philosophie der Zeit* gewidmeten Artikels stehen soll und zugleich sie es ist, die den *Finitisten* wie auch den *Infinitisten* zusätzliche, spezifisch auf die Zeit bezogene Schwierigkeiten bereitet, fangen wir die Untersuchung der *Unendlichkeitsmöglichkeit* mit der *leichteren*, nämlich der *räumlichen* Variante des Problems an.

Nehmen wir an, es gebe zwei konträre Eigenschaften in der Welt, die kontingenterweise einem beliebig kleinen Raumgebiet zukommen können (cf. Arsenijević (1989), S. 36). Wenn wir sie als „rot" und „grün" (in Anführungszeichen, da sie keine echten Farben sind) bezeichnen, dann sind '*der innerhalb eines nicht-„roten" Gebiets liegende „rote" Quader*' und '*der innerhalb eines nicht-„grünen" Gebiets liegende „grüne" Quader*' zwei Beschreibungen, die für eine *physikalisch gute Individuation* gewisser räumlicher Gebiete verwendet werden können, weil die entsprechenden „roten" und „grünen" Quader *Dinge einer gegebenen Art* sind. Im aristotelischen Sinne ist jeder solche Quader auch ein *aktueller* Teil eines Ganzen. Ist es nun möglich, dass es innerhalb eines begrenzten Raumgebiets unendlich viele und auf diese Weise gut individuierte „rote" und „grüne" Quader gibt?

Die Frage nach der *Metrik* ist hier nicht abzuweisen, weil das gegebene Raumgebiet nach Voraussetzung begrenzt ist, so dass die *Konvergenzbedingung* offensichtlich erfüllt sein muss. Deshalb firmieren verschiedene Varianten dieser Aporie manchmal als die *metrischen Paradoxa* (cf. Grünbaum, 1968, II). Es ist aber nicht wichtig, eine *bestimmte* geometrische Progression auszuwählen und das Problem so davon abhängig zu machen, dass *eine Metrik der Welt* gegeben ist. Die einzige metrische Bedingung ist nämlich, dass die Quader einer beliebigen unendlichen Teilmenge der innerhalb eines Gebiets liegenden Menge der unendlich vielen „roten" und „grünen" Quader einer Richtung entlang ihrer Größe nach *so oder so* nach und nach immer dünner und dünner werden, wenn auch die Weise, auf die es so ist, ganz offen bleiben mag.

10 Russell (1914), VI, VII, Hahn (1980), Benacerraf (1962), Grünbaum (1968), II, Salmon (1975), II u. a.

Es sei z.B. so, dass die in Bezug auf die anderen beiden Dimensionen gleichen Quader von links nach rechts so angeordnet sind, dass sie gegenseitig „rot" und „grün" sind, und dass der zweite doppelt so dünn ist wie der erste, der dritte doppelt so dünn wie der zweite usw. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Breite jeder Quader *rekursiv* so bestimmt ist, dass *keiner* der Quader unendlich dünner als der erste ist. Das Beispiel ist also innerhalb des *archimedischen* Raums formuliert, in dem es *keine unendlich kleine* Größe gibt. Es scheint also möglich zu sein, dass es innerhalb eines *begrenzten archimedischen Raums* genug Platz für unendlich viele nicht unendlich kleine und physikalisch gut individuierte Dinge gibt. Aus diesem Grund wurde oft gesagt, Zenon sei einfach ein *arithmetischer Fehler* unterlaufen,[11] wenn er behauptet hat, so etwas sei absurd. Angeblich hat er nicht gewusst, dass $1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n + \ldots = 2$.

So einfach ist die Sache aber nicht! Nehmen wir an, es sei gefährlich, einen „roten", aber nicht gefährlich, einen „grünen" Quader anzuschauen. Außerdem sei jeder „grüne" Quader ein guter Schutzschild gegen jeden „roten" Quader. Ist es dann für einen Betrachter gefährlich oder nicht gefährlich, das aus unendlich vielen nach und nach immer dünner und dünner werdenden Quadern bestehende Objekt von der rechten Seite anzuschauen, wenn zwischen dem Betrachter und dem Objekt nichts anderes ist als reine Luft (vgl. Abbildung 1; cf. Arsenijević (1992), S. 195)?

Infinitisten — seien sie Cantorianer oder Neo-Aristoteliker — können die Frage weder einfach mit „Ja!" noch mit „Nein!" beantworten. Aber sie dürfen auch nicht sagen, die Antwort könne kontingenterweise „Ja!" oder „Nein!" lauten! Wenn die kontingent wahre Antwort „Ja!" wäre, würde das bedeuten, dass sich auf der rechten Seite ein erster „roter" Quader befindet. In diesem Fall wäre aber innerhalb des übrigen Raumes aus *arithmetischen* Gründen *nicht genug Platz* für unendlich viele „rote" und „grüne" Quader, weil nach Voraussetzung keiner

11 Z.B. Grünbaum und Salmon a.a.O.; cf. auch Whitehead (1929), S. 107.

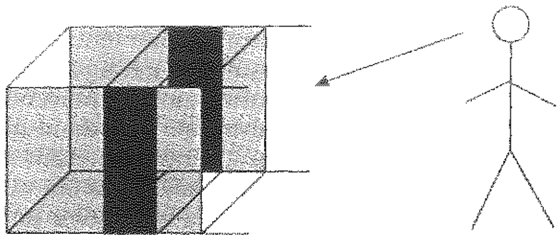

Abbildung 1: „rot“ „grün“ „rot“ usw.

der Quader unendlich klein ist. Dasselbe gilt, *mutatis mutandis*, für die Antwort „Nein!“.

Die einzige konsistente Antwort der Infinitisten ist also: *tertium datur*. Was aber könnte das bedeuten? Das angeschaute Objekt besteht nach Voraussetzung *nur* aus „roten“ und „grünen“ Quadern, die sich *nicht überlappen*. Also gibt es *weder* etwas Drittes, das angeschaut werden könnte, *noch* könnte es eine kombinierte „rot“-„grüne“ Eigenschaft geben, die dem von der rechten Seite angeschauten Objekt zukommen könnte.

Vom philosophischen Standpunkt ist die Situation äußerst interessant. Man kann störrisch sein und auf der infinitistischen Antwort beharren, weil sie sich angeblich auf eine gut begründete Mathematik berufen kann, und die „Ja oder Nein?“-Frage nach der Gefährlichkeit ohne weiteres *per definitionem* für „falsch gestellt“ erklären. Man kann aber die beschriebene Situation auch als eine *reductio ad absurdum* verstehen, die uns zeigt, dass es innerhalb eines begrenzten Raums für unendlich viele heterogene Gebiete doch *nicht genug Platz* gibt.

Der Vorteil der zweiten Alternative besteht nicht nur darin, dass sie eine intuitiv gut formulierte und unabweisbare Frage nicht verbietet, sondern auch in der Möglichkeit einer *Deutung* der finitistischen Antwort, die mit der standardmäßigen mathematischen Behandlung des Kontinuums doch *verträglich* ist.

Bemerken wir zunächst, dass die finitistische Schlussfolgerung, innerhalb eines begrenzten Raums gebe es für unendlich viele „rote“ und „grüne“ Quader nicht genug Platz, *weder* bedeutet, dass es räumliche Minima geben muss, *noch* so zu verstehen ist, dass die Eigenschaften „rot“ und „grün“ einem beliebig kleinem Raumgebiet nicht zukommen können. Die Verträglichkeit der Voraussetzung, dass die angegebenen

Eigenschaften *jedem* beliebig kleinen Raumgebiet zugeschrieben werden können, mit der Schlussfolgerung, dass diese Eigenschaften auf die beschriebene Weise *nicht allen* Mitgliedern einer geometrischen Progression zukommen können, folgt schon daraus, dass

$$\forall x \Diamond \phi x \Rightarrow \Diamond \forall x \phi x$$

(„wenn für alle Dinge x gilt, daß sie möglicherweise ϕ erfüllen, dann ist es möglich, daß alle Dinge x ϕ erfüllen“) kein allgemeingültiges Theorem der Modallogik ist. Es ist also *einfach nicht wahr*, dass die *infinitistische* Schlussfolgerung, unter den genannten Voraussetzungen *müsse* es für unendlich viele „rote“ und „grüne“ Quader genug Platz geben, *unvermeidbar* ist. Am wichtigsten aber ist es, eine klare Erklärung dafür zu geben, weshalb genau die infinitistische Schlussfolgerung *in dem gegebenen Fall* falsch ist.

Wir haben die Zuschreibung der angegebenen Eigenschaften *von einer Seite aus* rekursiv definiert, ohne darauf zu achten, wie das ganze Bild aussieht, wenn es *von der anderen Seite* betrachtet wird. Die Voraussetzung, dass „rot“ und „grün“ jedem beliebig kleinen Raumgebiet zukommen können, bedeutet *nicht*, dass die „bunte“, „rot“-„grüne“ Eigenschaft *unter allen Bedingungen* jedem Raumgebiet zuschreibbar ist. Die Möglichkeit einer solchen Zuschreibung hängt von *zusätzlichen* Betrachtungen ab. Das *prinicipium individuationis* verlangt, dass es *von jedem Punkt aus betrachtet* einen ersten „roten“ oder einen ersten „grünen“ Quader gibt.

Auch wenn wir die cantorsche oder neo-aristotelische Analyse des Kontinuums akzeptieren — wie wir es oben gemacht haben —, ist es *nicht notwendig*, auch zu akzeptieren, dass eine *nicht-elementare* Eigenschaft, wie es die „rot“-„grün“-Eigenschaft ist, in *dem* Sinne *unanalysierbar* sein kann, dass sie einer Grenzfläche an *jedem* beliebig kleinen Raumgebiet zukommen kann. Stattdessen dürfen wir voraussetzen, dass so etwas nur im Falle einer *elementaren* Eigenschaft sein *kann*, und dass es innerhalb eines beliebig kleinen Gebiets so auch sein *muss*. Es ist nämlich genau *diese* Voraussetzung, die den Unterschied zwischen *elementaren* und *nicht-elementaren* Eigenschaften ausmacht (cf. Arsenijević (2002), S. 127ff.). Unter dieser Voraussetzung *könnte* es innerhalb eines begrenzten Raums *immer mehr* „rote“ und „grüne“ Quader geben, als es in einem gegebenen Fall gibt, *ohne* dass die Anzahl dieser Quader *je* unendlich sein kann (cf. Arsenijević (1989), S. 38).

Ein Vergleich zwischen dem in sich *homogenen* begrenzten und dem in sich *heterogenen* begrenzten Kontinuum kann die angegebene Voraussetzung ganz plausibel machen. Wenn man einen in sich homogenen Würfel aus nach Voraussetzung unendlich vielen kleiner und kleiner werdenden Quadern betastet, ergibt es *keinen Sinn*, nach dem *ersten* von der rechten Seite betasteten Quader zu fragen, während es beim Betrachten des aus „roten" und „grünen" Quadern bestehenden Objekts unvermeidlich ist, dass *entweder* ein „roter" *oder* ein „grüner" Quader angeschaut wird.

Alles in allem kann man sagen, dass Aristoteles, obwohl er unser Beispiel nicht analysiert hat, Recht gehabt hat, als er seine *finitistische* Antwort auf eine *modale* Unterscheidung gestützt hat. Die Rechtfertigung des *mathematischen Infinitismus* beruht darauf, dass die Mathematiker ihre Analyse des Kontinuums auf den Fall des *homogenen* Kontinuums gegründet haben, wobei der Unterschied zwischen *potenziellen* und *aktuellen* Teilen *keine* Rolle spielt. Ohne diesen Unterschied trifft es zu, dass die *Anzahl* der Teile eines homogenen Kontinuums *größer* ist, als sie in jedem *gegebenen heterogenen* Fall sein kann, und dass sie *in diesem Sinne* unendlich ist. Oder, anderes gesagt, nur weil die Mathematiker bei ihrer Analyse des Kontinuums, *keinen physikalisch differenzierten* Fall in Anspruch nehmen, können sie *mit Recht* sagen, dass es *unendlich* viele Teile gibt. Es gibt also *keinen Widerspruch* zwischen dem *mathematischen Infinitismus* und dem auf die *Anzahl* der innerhalb eines begrenzten Gebiets existierenden *Dinge* bezogenen *Finitismus*.

Es ist wichtig zu bemerken, dass das Problem in dem angegebenen Beispiel *theorie-unabhängig* ist. Die *Punktontologen* können insistieren, es handele sich um ein offenes Intervall und deswegen sei die „Farbe" der auf der rechten Seite fehlenden Fläche durch die rekursive Bestimmung der „Farbe" der Quader *nicht bestimmt*. Die eine Antwort heischende Frage hängt davon aber gar nicht ab, weil wir vorausgesetzt haben, zwischen dem aus den „roten" und „grünen" Quadern bestehenden Objekt und dem Betrachter sei nichts anderes als reine Luft. Die Feststellung, die Frage nach der „Farbe" des von rechts betrachteten und auf die gegebene Weise beschriebenen Objekts sei *nicht bestimmt*, bedeutet freilich nicht, dass die *'welche-„Farbe"?'-Frage* keinen Sinn habe (wie Benacerraf (1962) in einem ähnlichen Zusammenhang falsch zu argumentieren versucht hat). Die Feststellung, die Frage nach der „Farbe" des von der rechten Seite betrachteten Objekts werde durch die rekursive Bestimmung der „Farbe" der das Objekt konstituierenden Quader nicht bestimmt, ist *wahr*, aber für eine Lösung des Problems *nicht hinreichend*. Tatsächlich ist diese Feststellung äquivalent mit der Behauptung, dass es *keine* mögliche Antwort auf die Frage nach der „Farbe" gibt, und das ist im gegebenen Zusammenhang absurd.

3.2 Die zeitlichen Varianten des Problems

Das Problem mit der *räumlichen* Variante der Frage nach der Möglichkeit eines unendlich differenzierten begrenzten Kontinuums entsteht — wie wir es gesehen haben —, wenn man die unendliche Heterogenität von *einer* Seite des Kontinuums rekursiv definiert und dann die Folgen einer solchen Bestimmung von der *anderen* Seite betrachtet. In den *zeitlichen* Varianten entsteht das Problem unabhängig davon, von *welcher* Seite die Konsequenzen betrachtet werden! Dieser Umstand bereitet, wie wir gleich sehen werden, große Schwierigkeiten nicht nur für den modernen *Infinitismus*, sondern auch für die eben vorgeschlagene Lösung, die den *mathematischen Infinitismus* mit einem *physikalischen Finitismus* kombiniert hat.

Fangen wir mit zwei modernen Varianten an! Die erste ist die von Grünbaum ausgearbeitete und von Allen Janis zusätzlich verschärfte Version der sogenannten *Thomsonschen Lampe* (Thomson, 1968, S. 412ff.; Grünbaum (1968), S. 101).

Ebenso wie in der obigen Konstruktion der metrischen Aporie sollen zuerst die Teilbewegungen, die zum Erreichen eines Ziels gedacht sind, durch etwas Objektives separiert werden. Drastischerweise können die Teilbewegungen sowohl durch die *Richtung* der Bewegung als auch durch die *eingesetzte Pause* getrennt werden, und in dem Fall der Thomsonschen Lampe entspricht dem Unterschied in der Richtung der Bewegung auch noch ein deutlich feststellbarer Unterschied der *Folgen*.

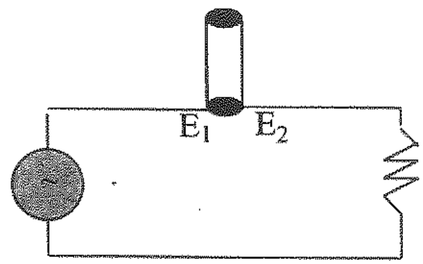

Abbildung 2: Thomsons Lampe.

Wir wollen deswegen voraussetzen, dass der Boden eines zylindrischen Schalters einer Lampe um die Position E_1E_2 oszilliert (s. Abbildung 2), wobei der Stromkreislauf nur dann geschlossen ist, wenn der Boden in der Position E_1E_2 ist und wenn er in diese Position von oben gekommen ist. Wir können etwa voraussetzen, dass ein Isolator automatisch um den Boden des Schalters gelegt wird, wenn er sich nach oben bewegt, so dass der Stromkreislauf immer noch unterbrochen bleibt, wenn der Boden auf diese Weise die Position E_1E_2 erreicht. Die oszillierende Bewegung sei nun folgendermaßen definiert: Der Schalter bewegt sich zuerst nach oben, so dass nach 1/4 s sein Boden 1/4 cm über E_1E_2 ist; in dieser Position bleibt der Schalter 1/2 s, dann bewegt er sich nach unten (1/4 + 1/8) s, womit der Boden am Ende 1/8 cm unter E_1E_2 ist und dort 1/4 s bleibt; dann bewegt sich der Schalter wieder nach oben (1/8 + 1/16) s, womit der Boden am Ende 1/16 cm über E_1E_2 ist und dort 1/8 s bleibt; und so weiter nach der geometrischen Progression: $1/4, (1/2^2 + 1/2^3), (1/2^3 + 1/2^4), \ldots, (1/2^n + 1/2^{n+1}), \ldots$ für die Bewegungsraum- und Bewegungszeitintervalle bzw. $1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n \ldots$ für die eingesetzten Pausen. Nehmen wir nun an, der Schalter bewegt sich nach zwei Sekunden nicht mehr. Es ist leicht zu zeigen, dass nach zwei Sekunden der Boden des Schalters in keiner anderen Position sein kann als in E_1E_2.

Was ist aber mit der *Lampe*? Ist sie nach zwei Sekunden und später *an* oder *aus*? Sollten wir schon wieder die Augen zudrücken, um die unerwünschte Folge zu vermeiden? Die Lampe ist ja *entweder* an *oder* aus, da der Stromkreislauf *entweder* geschlossen *oder* offen ist. Er ist aber *entweder* geschlossen *oder* offen, wieder *nur* weil gilt: *tertium non datur* — und *nicht* etwa deshalb, weil der Boden des Schalters die Position E_1E_2 entweder von oben oder von unten erreicht, weil er sie *weder* von oben *noch* von unten erreichen konnte, obwohl er in dieser Position *ist*! Etwas ist wieder schief gegangen.

Die zweite, etwas „mildere" Variante, die ebenfalls von Grünbaum (1968, II.) stammt, entsteht, wenn die Pausen während der Bewegung eines Objekts entsprechenderweise eingesetzt werden, ohne dass die Richtung der Bewegung geändert wird. Auf diese Weise sollte es nach Grünbaum für ein Objekt möglich sein, das Ziel *staccato* zu erreichen, wobei die Anzahl der Bewegungs- und Ruhezustände unendlich ist. Der Physiker Friedberg hat sogar eine Funktion konstruiert, nach der so etwas nicht nur *kinematisch* sondern auch *dynamisch* möglich sein sollte, wenn der Rhythmus, in dem die Pausen eingesetzt werden, auf eine solche Weise geändert wäre, dass keine unendliche positive und negative Beschleunigung nötig ist (cf. Grünbaum (1969), S. 213ff.).

Das Problem liegt aber nicht in der unendlichen Beschleunigung, sondern in der *Unendlichkeit der Bewegungs- und Ruhezustände*. Wenn es wirklich möglich wäre, das Ziel auf die beschriebene Weise *staccato* zu erreichen, wäre es *mutatis mutandis* auch für den Boden des Schalters der Thomsonschen Lampe möglich, die Position zu erreichen, in der die Lampe weder an noch aus ist.

Für diejenigen, die eine tempusfreie Theorie der Zeit akzeptieren und die Existenz einer objektiven Richtung der Zeit bestreiten (cf. insbesondere Price (1996), S. 171ff.), kann man das Problem noch auf die folgende Weise verschärfen: Wenn es für ein Objekt möglich wäre, das Ziel zu erreichen, ohne in einem letzten Bewegungs- oder Ruhezustand zu sein, sollte es für dasselbe Objekt auch möglich sein, mit der Umkehrung der Richtung der Zeit den Ort, in dem das Objekt ist, so zu ändern, dass *keine* erreichte Position mittels eines Zustands der Bewegung erreicht ist, weil *jede* Position bei der Ortsänderung mittels eines „kombinierten" Zustands erreicht wird.[12] Bei der Analyse des *Fliegenden Pfeils* (s. oben Abschn. 2.4) haben wir auf eine Konzession aufmerksam gemacht, die die statische Theorie der Bewegung der dynamischen Theorie machen muss: Es ist unmöglich, den Ort zu ändern, ohne in einem Zustand der Bewegung zu sein. Bei Infinitisten, die bereit sind, alle Folgen des Infinitismus zu akzeptieren, wird auch diese Konzession suspendiert, weil der *kombinierte* Zustand *kein* Zustand der Bewegung ist.

Alles in allem scheint es wiederum besser, die beiden angegebenen Varianten des Problems als *reductio ad absurdum* der beschriebenen Situationen zu fassen. Aber dieses Mal fällt es einem viel leichter das zu sagen, als die Konsequenzen einer Wahl ehrlich zu akzeptieren! Die oben vorgeschlagene *finitistische* Lösung des Problems scheint nämlich genauso unakzeptabel zu sein.

Erinnern wir uns daran, dass die mit dem mathematischen Infinitismus verträgliche finitistische Lösung darin besteht, dass die Anzahl der heterogenen Teile eines begrenzten Raumgebiets oder, wie in dem gegebenen Fall, einer Zeitstrecke[13] immer größer sein kann, als sie in jedem gegebenen heterogenen Fall ist, ohne dass sie je unendlich sein kann. Im Fall der Thomsonschen Lampe wie auch im Falle der *staccato*-Bewegung scheint aber der angegebene Unterschied irrelevant zu sein, weil die Anzahl der Bewegungs- und Ruhezustände in *einem und demselben* Fall *immer größer und größer wird*. Wenn wir also keine Begrenzung in Bezug auf die mögliche endliche Anzahl der verschiedenen Zustände gesetzt haben, kann diese Anzahl unbegrenzt größer und grö-

12 Cf. Arsenijević (1994), S. 104ff., und Arsenijević (1995), S. 88ff.

13 Die berümten auf die zeitliche aber nicht räumliche Variante des Problems bezogenen Finitisten waren Whitehead (1929), § 51, Bergson (1932), S. 337 und Weyl (1949), S. 42.

ßer *werden*. Statt einer Lösung erhalten wir also etwas weit Schlimmeres, nämlich ein naheliegendes Ziel, das wegen *des Größer-und-immer-größer-Werdens* der *heterogenen* Zustände *unerreichbar* bleibt!

Im Lichte solch unerwünschter Folgen könnte es uns einfallen, die angegebenen Situationen in der Tat für eine *reductio ad absurdum* der *tempusspezifischen* Theorie der Zeit zu halten, weil ja für den Fall, dass wir bereit sind, das *echte Werden* aus der Welt auszuschließen,[14] eine *infinitistisch-finitistische* Lösung der kinematischen Paradoxa möglich scheint, die analog zu der Lösung der metrischen Aporie ist.

Es gibt aber eine alte Variante des *Paradoxons des Achilles*, die so verstärkt werden kann, dass sie die vorgeschlagene tempusfreie Lösung unplausibel macht. Diese alte und von einem unbekannten Autor stammende Variante hat Aristoteles in *Physik* VI 2, 233a22 und VIII 8, 263a8 erwähnt: Um das Ziel zu erreichen, muss der Läufer alle nach einer geometrischen Progression bestimmten Teilstrecken einer Strecke *eine um die andere* berühren, womit seine Bewegung auf eine *Zählung* der entsprechenden Teilstrecken zurückgeführt wird.

Aristoteles selbst hat in der angegebenen Variante kein großes Problem gesehen, weil die nach einer geometrischen Progression individuierten Teilstrecken seines Konzeptes des Kontinuums nach *keine aktuellen* Teile sind, so dass es sich bei der Bewegung des Läufers auch *keinesfalls* um eine *Zählung* dieser Teile handelt. Diesmal aber hat der große Aristoteles das Problem leichtsinnig übersprungen.

Setzen wir voraus, Achilles und Zeus bewegten sich parallel ganz normal, also *legato* — nur dass Zeus, dem so etwas nach Voraussetzung möglich sei, die nach einer geometrischen Progression individuierten Strecken der zum Ziel führenden Strecke dabei auch *zählt* (s. Abbildung 3).

Da Zeus keinen „medizinischen Begrenzungen" im Sinne von Russell (1935–36, S. 143) unterworfen sein kann, so dass es bei ihm keine perzeptiven und apperzeptiven Minima gibt, kann er die Zählung *ins Unendliche* durchführen. Wenn aber Achilles und Zeus das Ziel erreicht haben, dann taucht die sehr unangenehme Frage auf: Wie viele Teilstrecken hat Zeus gezählt? Insbesondere ist es wichtig, diese Frage *von Zeus' Standpunkt aus* zu stellen. Denn dabei hilft eine *tempusfreie* Theorie der Zeit gar nichts! Die *Erfahrung der Zählung ins Unendliche* ist einfach mit der *Erfahrung des am-Ziel-Seins* unverträglich.

14 Die Verteidiger der tempusfreien Theorie der Zeit haben das echte Werden aus der Welt zwar ausgeschlossen, aber typischerweise nur deswegen, um konsequente Infinitisten zu bleiben; cf. Grünbaum (1950).

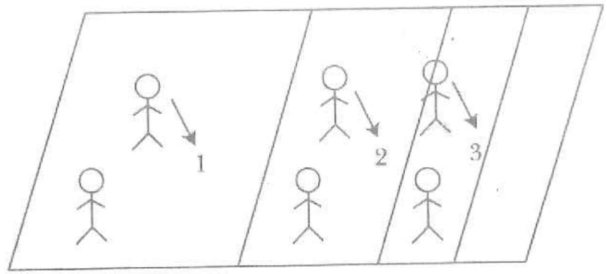

Abbildung 3: Achilles und Zeus.

Jetzt wird klar, warum das Problem unlösbar scheint, unabhängig von welcher Seite es betrachtet wird. *Dieses Mal* haben wir die unangenehme Frage auch *von der linken Seite betrachtet* gestellt. *Dieses Mal* handelt es sich nicht nur um das Problem der *Kardinal*zahlen der Teile eines heterogenen Kontinuums, sondern auch um die *Ordnungs*zahlen eines unendlichen Prozesses des Zählens. Hier können auch die hartnäckigsten Cantorianer nichts sagen, weil die *unendliche Ordnungszahl* ω voraussetzungsgemäß *nicht Schritt für Schritt* erreichbar ist, während das, was Zeus *tempusspezifisch* tut oder *tempusfrei* angeblich getan hat, eben die *Schritt-für-Schritt-Zählung* ist!

So haben wir den Punkt erreicht, an dem — *unabhängig* davon, ob wir Aristoteliker, Neo-Aristoteliker oder Cantorianer sind — das Problem unlösbar scheint. Man kann eine *radikal-empiristische* Position einnehmen und sagen, in unserer Erfahrung hätten wir *nie* mit so kleinen Teilen zu tun, wie sie in den Beschreibungen der problematischen Situationen genannt sind (cf. Black (1954), S. 117ff.). Man kann eventuell auch die Epikursche Theorie der Raum- und Zeitminima zu Hilfe rufen. Zu der ersten Reaktion werde ich gleich etwas sagen. Die letztere ist mindestens mit der Standardmathematik unverträglich (cf. PS.-Aristoteles, *De lin. insec.* 970aff.).

Was ist zu tun? Wenn nichts anderes hilft, ist es nicht schlecht, sich an die Worte von Wagners Parsifal zu erinnern:

> Nur eine Waffe taugt:
> die Wunde schließt
> der Speer nur, der sie schlug.

Vielleicht müssen wir Zenon schon noch etwas zugeben. Was geschieht denn, wenn wir akzeptieren, dass Zeus *nie* das Ziel erreichen wird, wenn er die nach einer geometrischen Progression individuierten Teile *ins Unendliche* weiter und weiter zählt?

Das Problem besteht ja freilich darin, dass *dann auch* Achilles das Ziel *nie* erreichen wird! Sind aber die *zwei Erfahrungen*, die von Zeus und die von Achilles, *notwendigerweise verträglich*? Oder gibt es vielleicht *keine mögliche Welt*, in der Zeus die Teilstrecken weiter und weiter zählen und Achilles das Ziel erreichen wird?

Vielleicht ist das Problem grundsätzlich *weder* mathematisch *noch* philosophisch, sondern *psychologisch*! Versuchen wir uns mit etwas Phantasie in die Situation des Zeus hineinzufinden. Wenn es für ihn *wirklich möglich* ist, die immer kleiner und kleiner werdenden Teilstrecken zu zählen, dann ist es ihm voraussetzungsgemäß auch möglich, währenddessen ein *ewiges Leben* zu leben. Die entsprechenden Zeitstrecken sind für ihn wie die Jahre für uns. Enthält dann die Aussage, dass er und mit ihm auch Achilles das Ziel *nie* erreichen wird, etwas Widersprüchliches? Er *kann* ja zugleich in jedem Augenblick entscheiden, mit der Zählung der Teilstrecken *aufzuhören* und das Ziel zu *erreichen*, obwohl er das *nie* machen *muss*!

In der Modallogik gilt nicht, dass $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$. Das bedeutet: Wenn '$p$' dafür steht, dass Zeus die Teilstrecken für immer zählen wird, und 'q' dafür, dass das Ziel erreicht werden wird, so impliziert die Konjunktion der Behauptung der Möglichkeit der Zählung der unendlich vielen Zeitstrecken — $\Diamond p$ — mit der Behauptung der Erreichbarkeit des Ziels — $\Diamond q$ — gerade *nicht* die Behauptung der Erreichbarkeit des Ziels unter der Voraussetzung der Zählung der unendlich vielen Teilstrecken ins Unendliche — $\Diamond(p \wedge q)$.

Es gibt vielleicht einen *Kern von Wahrheit* in der erwähnten *radikalempiristischen* Lösung des Problems, die auf der *Einstellung der Unendlichkeit* der Prozesse in den gegebenen Situationen beruht und die sogar der große Hilbert selbst für die echte Lösung gehalten hat (cf. Hilbert und Bernays (1968), S. 16). Nach dieser Lösung verschwindet das Problem einfach deshalb, weil es so etwas wie die unendlichen Oszillationen des Schalters der Thomsonschen Lampe *in der Tat nicht* gibt. Die hilbertsche Begrenzung ist aber *willkürlich* und *unnötig streng*. Wenn wir schon das Spiel mit den Infinitisten begonnen haben, sollten wir es bis zum Ende spielen! Wir können ihnen die *Möglichkeit* der Entwicklung der unendlichen Prozesse gerne gönnen, weil für die Lösung des Problems die *Unverträglichkeit* ihrer unendlichen Entwicklung mit dem Erreichen des Ziels *genug* ist. Es genügt nämlich zu sagen, dass

Achilles sein Ziel nie erreichen wird, sollte Zeus die Teilstrecken ins Unendliche zählen, und dass Achilles sein Ziel nicht erreicht hätte (wiewohl er es *de facto* erreicht hat), wenn Zeus die Teilstrecken ins Unendliche gezahlt hätte.[15]

4 Schlussfolgerung

4.1 *Die Frage über die Struktur der Zeit und weitere darauf bezogene Fragen*

Was ist nun von dem, was Zenon über die mögliche Struktur des linearen archimedischen Kontinuums bzw. der Zeit gesagt hat, in den cantorschen und neo-aristotelischen Konzepten erhalten geblieben? Und was ist in diesem Zusammenhang das Ergebnis des „großen Streits" zwischen den Aristotelikern und Cantorianern?

Die zwei Konzepte sind widerspruchsfrei zumindest dann formulierbar, wenn sie ohne weiteres nur in Bezug auf das *reine* bzw. *in sich homogene* Kontinuum formuliert werden, wobei in jedem Fall die beiden cantorsche Bedingungen erfüllt sein müssen: die Bedingung, perfekt und zusammenhängend zu sein, und die Bedingung, dass die Anzahl der Elemente größer als $\aleph_0$ ist. Innerhalb des cantorschen Konzepts bedeutet dies erstens, dass das Kontinuum keine wohlgeordnete, sondern *nur eine geordnete* Struktur ist, und es bedeutet zweitens, dass sie — exakt so, wie es Zenon behauptet hat — *eines nach dem anderen* aus ihren Elementen nie aufgebaut werden kann. Im Fall des aristotelischen Konzepts gilt schon automatisch, dass es *keine erste* an eine gegebenen Strecke sich anschließende Strecke gibt, aber es ist dabei auch nötig, dass es bei dem Aufbau des Kontinuums *keinen Platz* für neue Strecken gibt, was nur dann erfüllt wird, wenn die Elemente eine *zusammenhängende* Struktur bilden (und das ist etwas, das Aristoteles nicht wissen konnte).

Wenn die letztere Bedingung im Fall der aristotelischen Theorie erfüllt ist, sind die zwei Theorien, wenn sie axiomatisch erfasst werden, überraschenderweise nur trivial verschieden.

Hat dann die Frage, ob nun *Zeitpunkte* (Augenblicke) oder *Zeitstrecken* (Perioden) die Elemente der Zeit sind, überhaupt noch einen Sinn? Die Antwort ist: „Nein!". Im Fall eines homogenen Kontinuums bzw. *der reinen Zeit* gibt es *nichts*, was entweder die Zeitpunkte oder die Zeitstrecken als die Elemente des Zeitkontinuums favorisieren könnte!

15 Zum ersten Mal habe ich diese Lösung in Arsenijević (1988), § 4 dargestellt; s. auch Arsenijević (1995).

Damit ist aber *nicht* gesagt, dass *die beiden Ontologien der Zeit ununterscheidbar* bleiben müssen, wenn die beiden trivial verschiedenen formalen Systeme auf eine gewisse Weise *erweitert* werden (cf. Arsenijević (1992) II). Zentral ist in diesem Zusammenhang die folgende Frage: Kommen die *nicht-relationalen physikalischen* Eigenschaften *in erster Linie* den *Punkten* bzw. *Augenblicken* oder den *Raumgebieten* bzw. *Zeitstrecken* zu? Da ich mich hier mit dieser Frage nicht beschäftigt habe, kann ich nur ganz kurz die Richtung skizzieren, in die weitere Untersuchungen zu führen wären.

Die *Ontologie der Zeitpunkte* scheint für *kontinuierliche Änderungen* unmittelbar passend zu sein (cf. *ibid.*, II. 4). Bei einer kontinuierlichen Temperaturänderung ist z.B. die Temperatur im cantorschen System in jedem gegebenen *Augenblick* fixiert, ohne dass sie für irgendeine *Zeitstrecke* jemals fest bleibt. In der *Zeitstreckenontologie* müsste man, was die Temperatur in einem Zeitpunkt ist, im Rekurs auf die *Temperaturänderung analysieren*. Dafür genügt es nicht mathematisch zu fassen, *wie* die Temperatur sich ändert, weil die Art und Weise der Veränderung etwa zwischen 2° C und 4° C *gleich* der zwischen 8° C und 10° C sein kann. Den Unterschied zwischen zwei Temperaturänderungen kann man nur feststellen, wenn man eine gewisse *ständige* Temperatur in Anspruch nimmt. Wenn die Temperatur aber *kontinuierlich* geändert wird, kann die *ständige* Temperatur nur so ins Spiel gebracht werden, dass sie in Bezug auf eine gewisse *mögliche Welt* definiert wird. Man kann z.B. sagen, dass die Temperatur, wenn sie sich zu Beginn der ersten Temperaturänderung nicht weiter *geändert hätte*, 2° C *gewesen wäre*, während sie im Fall der zweiten Temperaturänderung 8° C *gewesen wäre*, falls sie sich zu Beginn überhaupt nicht *geändert hätte*. Diese Lösung ist grundsätzlich derjenigen ähnlich, die Platon im *Kratylos* einst für die Möglichkeit des Redens über die heraklitische sich stetig ändernde Welt vorgeschlagen hatte und die MacLaurin später in seiner kontrafaktischen Analyse der Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt ausgenutzt hat (cf. Arsenijević (1992), S. 193). Was in der stetig sich wandelnden Welt passiert, lässt sich nur beschreiben im Rückgriff auf das, was ständig ist.

Bezüglich der *nicht-kontinuierlichen* Änderungen scheint die Lage noch komplizierter zu sein. Setzen wir voraus, die Geschwindigkeit der Bewegung eines Objekts werde etwa wegen eines Zusammenstoßes *in einem Zeitpunkt* bzw. *diskontinuierlich* geändert. Was ist die Geschwindigkeit des bewegenden Objekts *in diesem Zeitpunkt*? Nach der *Streckenontologie* hat es *in erster Linie keinen Sinn*, das zu fragen. Wenn wir aber den *trivialen Unterschied* zwischen der *Punkt-* und der *Streckenontologie* in Anspruch nehmen, muss man die Frage in diesem wie auch im Falle der *Punktontologie so* oder *so* beantworten. Aristoteles hat sie mit „*weder-noch*" beantwortet (*Phys.* VI 8, 239b1). In dem angegebenen Beispiel sowie auch im Falle des Übergangs aus dem Ruhe- in den Bewegungszustand ist das Objekt im Grenzpunkt weder in dem einen noch in dem anderen zweier konträrer Zustände. Man kann indes auch sagen, die Geschwindigkeit sei *wegen des Laufs der Zeit* in dem Grenzpunkt exakt *gleich* groß wie die *größte* erreichte Geschwindigkeit der zu diesem Zeitpunkt führenden Bewegung (was im Falle der räumlichen Variante desselben Problems absurd wäre), oder sie sei genau exakt *gleich* groß wie die *kleinste* weiterführende Geschwindigkeit (was gewiss viel schlimmer klingt), oder aber sie sei exakt *gleich* groß wie *die beiden angegebenen* Geschwindigkeiten, da das Objekt im Grenzpunkt zu *beiden* einander anschließenden Welten gehört. Gesetzt, man wählt letzteres, ist aber die Geschwindigkeit *keine Funktion* mehr, deren Argumente die Zeitkoordinaten und die Funktionswerte die Geschwindigkeitskoordinaten sind, sondern *nur* eine *Relation*, für die gilt, daß den Zeitkoordinaten zwei verschiedene Geschwindigkeitswerte entsprechen können.

4.2 *Die Frage über die physikalisch unendlich differenzierten Zeitstrecken einer Zeitperiode*

Im Fall des reinen, in sich homogenen Kontinuums können die Punktontologie sowie die Streckenontologie auf eine verhältnismäßig plausible Weise verteidigt werden: die erste nur mittels der beiden cantorschen Bedingungen und der Unendlichkeit höherer Ordnung, die zweite außerdem vermittels der Änderung des Begriffs des Elements. Dabei erweisen sich die beiden Ontologien nicht nur als verträglich, sondern überraschenderweise sogar als bloß trivial verschieden. Im Gegensatz dazu offenbaren die Zenonischen Argumente eine unerwartete Stärke, wenn die unendlich vielen ausgedehnten Entitäten eines begrenzten Kontinuums physikalisch individuiert bzw. untereinander verschieden sein sollten. Nach der obigen Analyse mehrerer Beispiele zeigte sich, dass es in diesem Fall für unendlich viele solcher Entitäten einfach nicht genug Platz gibt! Dabei hängt das Resultat *nicht von einer vorausgesetzten Metrik* des Raumes, der Zeit oder in ihnen existierenden Welt ab, sondern nur davon, dass es sich voraussetzungsgemäß um ein *begrenztes* Segment der Welt handelt.

Dieses Ergebnis zeigt folglich, dass Aristoteles das Problem mit guten Gründen durch die Unterscheidung zwischen den potenziellen Teilen des Raums und der Zeit und den aktuell differenzierten Teilen der raum-zeitlichen Welt zu lösen versucht hat. Diese Lösung hat eine direkte Konsequenz für die Frage nach dem *ontologischen Status* des Raums und der Zeit. Diese Teile sind nicht nur an sich nicht aktuell. Vielmehr können unendlich viele Teile eines Segments niemals gleichzeitig physikalisch aktualisiert werden, weil es bei jeder möglichen Aktualisierung nach jeder beliebigen geometrischen Progression einen Häufungspunkt gibt, in dessen Nähe unendlich viele Teile unaktualisiert geblieben sein müssen.

Es könnte uns in den Sinn kommen, die Situation könnte durch eine *gleichzeitige Verwendung* der unendlich vielen Aktualisierungen geändert werden. Um zu sehen, dass dem nicht so ist, genügt es, einen beliebigen Punkt innerhalb des gegebenen Segments auszuwählen. Unabhängig von der geometrischen Progression, gemäß der die Teile aktualisiert werden, muß es immer eine „kleine" ε-Nähe geben, in der die Teile nicht aktualisiert sind. Die zwei Theoreme der Standardanalysis

$$\forall n \exists \varepsilon \left(\frac{2^n - 1}{2^n} < 1 - \varepsilon \right) \quad \text{und} \quad \forall \varepsilon \exists n \left(\frac{2^n - 1}{2^n} > 1 - \varepsilon \right)$$

sind nur deshalb verträglich, weil sie sich auf keinen gegebenen Aktualisierungsfall beziehen, so daß n und ε *nicht absolut* fixiert sind. In Bezug auf mögliche Aktualisierungsfälle besagen die beiden Theoreme freilich, dass es bei jeder Aktualisierung eine unaktualisierte ε-Nähe geben muss, obwohl diese immer kleiner sein könnte, als sie in einem beliebigen gegebenen Fall ist.

Es gibt jedoch etwas, das Aristoteles ganz und gar übersehen hat, und das ist für die Philosophie der Zeit eben das Wichtigste. Wenn Zeus die Teilstrecken nach einer geometrischen Progression zählt, so wird n größer und größer, und ε wird kleiner und kleiner ohne Grenze; und es gibt keinen Grund, warum das nicht immer so bleiben sollte. Wenn wir nun die infinitistische Lösung nicht akzeptieren — und die Gründe gegen diese Lösung sind noch stärker als in der räumlichen Variante des Problems —, so spricht dieses Beispiel auch gegen die *tempusfreie* Theorie der Zeit, weil ja die Wahrheitsbedingungen des Satzes, der besagt, dass Zeus und Achilles das Ziel erreicht haben, von Zeus' Entscheidung abhängen, die dieser aber wieder und wieder ins Unendliche verschieben kann.

Nach jener Lösung dieses unausweichlichen und zugleich enorm schwierigen Problems, die wir oben vorgeschlagen haben, muss man einfach akzeptieren, dass alles nur davon abhängt, was Zeus entscheidet. Wenn er entscheidet, die Teilstrecken ununterbrochen weiter zu

zählen, wird die angeblich begrenzte Zeit nie abgelaufen sein, was uns nur deshalb so seltsam dünkt, weil wir niemals *de facto* in Zeus' Situation sein können; und vielleicht gibt es auch gar keinen Zeus. Aber *im Prinzip* ist seine Existenz *nicht unmöglich*. Das, was nach unserer Lösung von Zeus abhängt, ist nur in genau dem Maße „unmöglich", in dem alle anderen Maschinen, die die Infinitisten ersonnen haben (cf. Arsenijević (1988), S. 37ff.), unmöglich sind — mit dem kleinen Unterschied, dass die vorgeschlagene Lösung, im Gegensatz zur infinitistischen Lösung, keine weitere Schwierigkeiten mit sich bringt. Das ist das Beste, das man haben kann, wenn man das Spiel unter den infinitistischen Voraussetzungen spielen will.

Die vorgeschlagene Lösung der schwierigsten auf die Zeit spezifisch bezogenen Aporie hat eine *zusätzliche* Implikation im Hinblick auf die Frage nach dem *ontologischen Status* der Zeit. Ob es nach einem Zeitpunkt überhaupt noch eine Zeit geben wird, hängt — in einer zumindest partiell indeterministischen Welt — davon ab, was es in dieser Welt *de facto* geschieht. Das spricht in einem äußerst starken Sinne *für* die *Leibnizsche Theorie* der Abhängigkeit der *Existenz* und des *Laufs* der Zeit von der Existenz der Welt und dem, was in ihr geschieht.

Möchte man in diese Richtung weiter spekulieren, so könnte man noch eine weitere ganz unerwartete Konsequenz ableiten, die sich auf die *Topologie der Zeit* bezieht, wie sie in der Relativitätstheorie erfasst ist. Wenn die Zeit sich verzweigt und lokal ist, dann kann es geschehen, dass Zeus in einem kleinem Teil der Welt die Teilstrecken immer noch weiter und weiter ins Unendliche zählt, während in einem anderen Teil der Welt unsere eigene Geschichte weiter vorschreitet (cf. Belnap (1992) und (2005), S. 300ff.).

Verzeichnis der antiken und mittelalterlichen Autoren

Aristoteles, *Physik* und *Metaphysik*.

Augustinus, *Confessiones*.

DK = Diels, H. und Kranz, W., *Die Fragmente der Vorsokratiker*.

Epikur, *Epistula ad Herodotum*.

PS.-Aristoteles, *De lineis insecabilibus*.

Simplicius, *Commentaria in Aristotelis Physicorum libros quattuor posteriores*.

Thomas von Aquin, *De aeternitate mundi*.

Weitere Literatur

Adams, F. C. und Laughlin, G. (1997), „A dying universe: the long-term fate and evolution of astrophysical objects", *Review of Modern Physics* 69 (S. 337–372).

Arsenijević, M. (1988),„Solution of the Staccato Version of the Achilles Paradox", in *Contemporary Yugoslav Philosophy: The Analytic Approach* (hg. von A. Pavković), Dordrecht: Kluwer (S. 27–55).

Arsenijević, M. (1989), „How many physically distinguished parts can a limited body contain?" *Analysis* 38 (S. 36–42).

Arsenijević, M. (1992), „Eine aristotelische Logik der Intervalle, die Cantorsche Logik der Punkte und die physikalischen und kinematischen Pradikate I, II," *Philosophia Naturalis* 2 (S. 161–209).

Arsenijević, M. (1994), „Mathematics, infinity and the physical world", *Dialektik* 3 (S. 89–107).

Arsenijević, M. (1995), „Logic, mathematics and philosophy", in *Physik, Philosophie und die Einheit der Wissenschaften* (hg. von L. Krüger und B. Falkenburg), Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag (S. 83–94).

Arsenijević, M. (2002), „Determinism, indeterminism and the flow of time", *Erkenntnis* 56/2 (S.123–150).

Arsenijević, M. (2003a), „Generalized concepts of syntactically and semantically trivial differences and instant-based and period-based time ontologies", *Journal of Applied Logic* 1 (S. 1–12).

Arsenijević, M. (2003b), „Real tenses" in *Time, Tense, and Reference* (hg. von A. Jokić. und Q. Smith), Cambridge MA: MIT Press (S. 325–354).

Arsenijević und Kapetanović (2007a), „An $L\omega_1\omega_1$ Axiomatization of the Linear Archimedean Continua as Merely Relational Structures", *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Applied Mathematics*, Dallas (S. 180–185).

Arsenijević, M und Kapetanović, M. (2007b), „The 'great struggle' between Cantorians and Neo-Aristotelians: Much ado about nothing", *Grazer Philosophische Studien* [im Druck].

Arsenijević, M., Šćepanovič, S. und Massey, G. (2007), „A new reconstruction of Zeno's Flying arrow", *Apeiron* [im Druck].

Barrow, I. (1916), *Geometrical Lectures*, Chicago: Open Court.

Barrow, J. und Dabrowski, M. P. (1995), „Oscillating universes", *Monthly Notices of the Royal Astronomicsl Society* 275.

Belnap, N. (1992), „Branching space-time", *Synthese* 92.

Belnap, N. (2005), „Agents and agency in branching space-times", in *Logic, Thought & Action* (hg. von D. Vanderveken), Heidelberg: Springer Verlag.

Benacerraf, P. (1962), „Tasks, super-tasks and modern Eleatics", *Journal of Philosophy* 24.

Benthem, J. van (1995), „Temporal logic", in: *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 4 (hg. von D. M. Gabbay et al.), Oxford: Clarendon Press (S. 241–350).

Bergson, H. (1932), *L'evolution creatrice*, Paris: Librairie Félix Alcan.

Black, M. (1954), *Problems of Analysis*, Ithaca NY: Cornell University Press.

Burgess, J. P. (1982), „Axioms for tense logic II: Time periods", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 23, S. 375–383.

Cantor, G. (1962), *Gesammelte Abhandlungen*, Hildesheim: Olms.

Duhem, P. (1956), *Le Systèm du Monde*, VII, Paris: Hermann.

Einstein, A. 1911, „Die Relativitätstheorie", *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*.

Fraassen, B. Van (1970), *An Introduction to Philosophy of Time and Space*, New York: Random House.

Frege, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau: Koebner.

Geach, P. T. (1972), *Logic Matters*, Basil Blackwell, Oxford.

Grünbaum, A. (1950), „Relativity and atomicity of becoming", *Review of Metaphysics* 2, Vol. 4.

Grünbaum, A. (1968), *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, London: George Allen & Unwin.

Grünbaum, A. (1969), „Can an infinitude of operations be performed in a finite time?", *British Journal for the Philosophy of Science* 20: 203–218.

Grünbaum, A. (1973²), *Philosophical Problems of Space and Time*, Dordrecht: Reidel.

Hahn, H. (1980), „Does the infinite exist?", in *Empiricism, Logic and Mathematics*, Dordrecht: Reidel.

Hamblin, C. L. (1971), „Instants and intervals", *Studium generale* 24 (S. 127–134).

Hilbert, D. und Bernays, P. (1968), *Grundlagen der Mathematik* I, Heidelberg: Springer Verlag.

Kant, I. (1781/87), *Kritik der reinen Vernunft*, zitiert nach der Seitenzählung der ersten (A) und zweiten (B) Auflage.

Kardashev, N. S. (1990), „Optimistic cosmological model", *Monthly Noticies of the Royal Astronomical Society* 143.

Leibniz, G. W. (1956), *The Leibniz - Clarke Correspondence* (übers. und hg. von H. G. Alexander), Manchester: Manchester University Press.

Mellor, D. H. (1998), *Real Time II*, London: Routledge.

Minkowski, H. (1923), „Space and time", in Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H. und Weyl, H., *The Principle of Relativity*, London: Methuen.

Needham, P. (1981), „Temporal intervals and temporal order", *Logique et Analyse* 24 (S. 49–64).

Newton, I. (1953), *Newton's Philosophy of Nature* (hg. von H. S. Thayer), New York: Hafner.

Newton, I. (1972), *Principiae Naturalis Principia Mathematica* I–II, Cambridge MA: Harvard University Press.

Poincaré, H. (1913), *The Foundation of Physics*, New York: Science Press.

Price, H. (1996), *Time's Arrow and Archimedean Point*, Oxford: Oxford University Press.

Quine, W. V. O. (1961), *From a Logical Point of View*, Cambridge MA: Harvard University Press.

Rees, M. J. (1969), „The collapse of the universe: an eschatological study", *Observatory* 89 (S. 193–198).

Reichenbach, H. (1956), *The Direction of Time*, Berkeley CA: University of California Press.

Roeper, P. (2006), „The Aristotelian Continuum: A formal characterization", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 47 (S. 211–232).

Russell, B. (1903), *The Principles of Mathematics*, London: George Allen & Unwin.

Russell, B. (1906), „Review of MacCall's *Symbolic Logic and its Applications*", *Mind* 15.

Russell, B. (1914), *Our Knowledge of the External World*, London: George Allen & Unwin.

Russell, B. (1935–36), „The limits of empiricism", *Proceedings of the Aristotelian Society*, NS 36.

Salmon, W. C. (1975), *Space, Time, and Motion*, Encino CA: Dickenson.

Thomson, J. F. (1968), „Tasks and super-tasks", *Analysis* 15.

Venema, Y. (1990), „Expressiveness and completeness of an interval tense logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 31 (S. 529–547).

Weyl, H. (1949), *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*, Princeton NJ: Princeton University Press.

Wheeler, J. A. und Feynman, R. P. (1949), „Classical electrodynamics in terms of direct interparticle actions", *Review of Modern Physics* 21 (S. 425–433).

White, M. J. (1988) „An 'almost classical' period-based tense logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 29 (S. 438–453).

Whitehead, A. N., *Process and Reality*, MacMillan, New York.

* Für viele Diskussionen und die sprachlich-stilistische Verbesserung der Endversion des Textes bin ich meinem Freund Hans-Peter Schütt sehr dankbar.